# Розділ II

# ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Серед усіх наук, які відкривають людству шлях до пізнання, наймогутніша, найвеличніша наука — математика.

*С. В. Ковалевська, перша у світі жінка, яка працювала на посаді професора математики*

Національний університет «Острозька академія»

Численні геометричні об'єкти й навіть напрями геометричних досліджень ученим підказує сама природа. Зокрема, чимало предметів, які вона створила, мають форму тіл обертання.

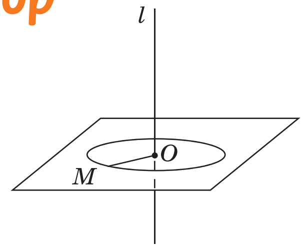
У цьому розділі розглядатимуться три класичних тіла обертання — циліндр, конус і куля. Усі вони є лише абстрактними моделями тих реальних предметів, які оточують нас у повсякденному житті, але загальні дослідницькі підходи й результати, які будуть отримані, придатні для використання в архітектурі, мистецтві, техніці.

Вивчення тіл обертання спирається на відомі з курсу планіметрії властивості кіл і многокутників. У процесі опанування нового матеріалу вам допоможуть також моделі тіл, що розглядатимуться, які ви можете знайти або виготовити власноруч.

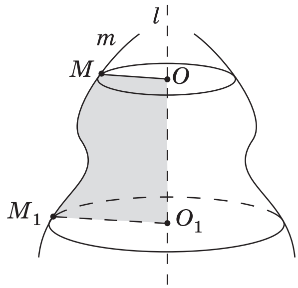
# § 7 Тіло обертання. Циліндр

## 7.1. Поверхні та тіла обертання

Унаслідок обертання навколо осі $l$ на кут $360°$ довільна точка $M$, яка не належить прямій $l$, описує коло (рис. 85, *а*). Центр цього кола $O$ лежить на прямій $l$, а саме коло — у площині, яка проходить через точку $M$ перпендикулярно до цієї прямої.




а




б

**Рис. 85.** Лінії, поверхні та тіла обертання

Розглянемо тепер лінію $m$, яка лежить в одній площині з прямою $l$ та не перетинає її. Під час обертання навколо прямої $l$ кожна точка лінії $m$ описує коло з центром на цій прямій; лінія $m$ при такому обертанні описує деяку поверхню (рис. 85, *б*), яку називають ***поверхнею обертання***.

Повернемося до рис. 85, *а* і розглянемо обертання навколо прямої $l$ відрізка $OM$, один із кінців якого належить цій прямій. Унаслідок такого обертання утворюється круг із центром $O$ і радіусом $OM$. Тоді внаслідок обертання навколо прямої $l$ плоскої фігури $OMM_1O_1$ (на рис. 85, *б* її зафарбовано) утворюється геометричне тіло, яке називають ***тілом обертання***. Пряму $l$ у такому випадку називають ***віссю тіла обертання***, а сукупність точок кіл, які описують точки лінії $MM_1$, — ***поверхнею тіла обертання***.

Очевидно, що будь-який переріз тіла обертання площиною, перпендикулярною до його осі, є кругом. Розглянемо переріз тіла обертання площиною, яка проходить через його вісь. Такий переріз називається ***осьовим***. На рис. 86 шестикутник $ABCDEF$ — осьовий переріз тіла обертання. Дане тіло утворюється обертанням плоского п'ятикутника $ABCKM$ навколо прямої, що містить сторону* $KM$.

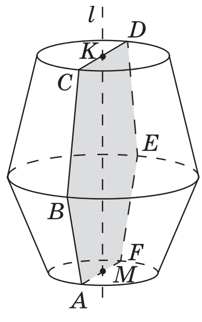



**Рис. 86.** Осьовий переріз тіла обертання

* Далі замість слів «плоский многокутник обертається навколо прямої, що містить його сторону», ми будемо казати «многокутник обертається навколо сторони».

Форму тіл обертання мають елементи архітектурних споруд, технічних деталей, різноманітні види посуду тощо (рис. 87). Узагалі означення будь-якого тіла обертання можна дати двома способами — через опис самого тіла або через опис способу його отримання обертанням плоскої фігури навколо осі (докладніше про види означень йтиметься в п. 7.3). Далі ми будемо дотримуватися більш традиційного, першого, способу означення, але також указувати, як отримати дану фігуру шляхом обертання.

а б в г

**Рис. 87.** Предмети, що мають форму тіл обертання

## 7.2. Циліндр. Перерізи циліндра

### Означення

**Циліндром** (точніше, **круговим циліндром**) називається тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

**Циліндр** — від грецького «киліндро» — обертаю.

Круги називають ***основами циліндра***, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл, які обмежують основи, — ***твірними циліндра***.

Циліндр називається ***прямим***, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ. *Оскільки в шкільному курсі ми розглядатимемо лише прямі кругові циліндри, то далі домовимося називати їх просто циліндрами.*

***Радіусом циліндра*** називається радіус його основи.

***Висотою циліндра*** називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи циліндра до площини іншої основи. Очевидно, що висота циліндра дорівнює його твірній.

На рис. 88 зображено циліндр із центрами основ $O$ та $O_1$. Відрізок $AA_1$ — твірна цього циліндра, а відрізки $OA$ і $O_1A_1$ — його радіуси.

Розглянемо деякі властивості циліндра.

Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то ***основи циліндра — рівні круги, що лежать у паралельних площинах***.

Так само з властивостей паралельного перенесення випливає, що ***твірні циліндра паралельні й рівні***.

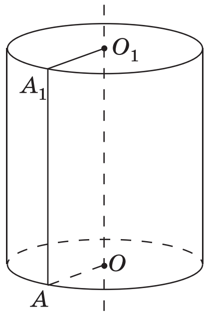



**Рис. 88.** Циліндр

Циліндр є тілом обертання, яке утворюється обертанням прямокутника навколо його сторони. Наприклад, на рис. 88 зображено циліндр, утворений обертанням прямокутника $OAA_1O_1$ навколо сторони $OO_1$. Отже, ***пряма, що проходить через центри основ, є віссю циліндра***. Зауважимо також, що ***відрізок, який сполучає центри основ циліндра, дорівнює твірній***, а отже, й висоті циліндра.

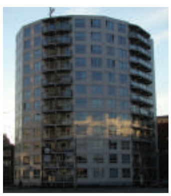
Циліндричні форми набули поширення в різних галузях людської діяльності — архітектурі, техніці, спорті, побуті (рис. 89).

Розглянемо деякі види перерізів циліндра.

Переріз циліндра площиною, паралельною площині основи, є кругом, що дорівнює основі

а

б



в

г

**Рис. 89.** Циліндричні форми

(рис. 90, *а*). Справді, паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{O_2O}$ переводить площину перерізу $\alpha$ в площину основи, а сам переріз — в основу циліндра. Зокрема, площина, яка паралельна площині основи і проходить через середину висоти циліндра, є площиною його симетрії.

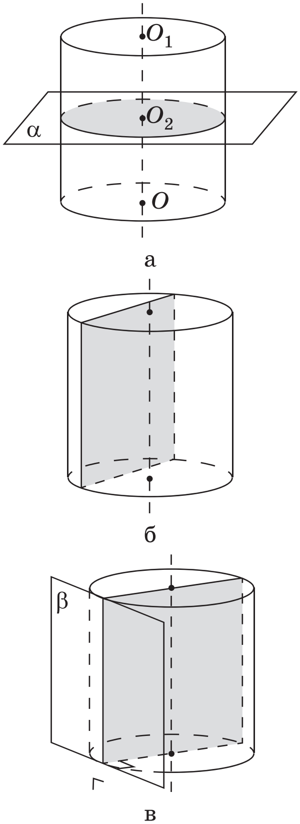



**Рис. 90.** Перерізи циліндра

Оскільки твірні циліндра паралельні одна одній та його осі, рівні й перпендикулярні до основ, то ***переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником*** (рис. 90, *б*). Дві сторони цього прямокутника — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди його основ. Осьовий переріз циліндра також є прямокутником (рис. 90, *в*), дві сторони якого є твірними циліндра, а дві інші — паралельними діаметрами його основ.

У випадку, коли висота циліндра дорівнює діаметру його основи, осьовим перерізом циліндра є квадрат, а сам циліндр називають ***рівностороннім***.

Площина осьового перерізу є площиною симетрії циліндра (обґрунтуйте цей факт самостійно).

Площина, яка проходить через твірну циліндра та перпендикулярна до осьового перерізу, що містить цю твірну, називається ***дотичною площиною до циліндра***. Площина $\beta$ на рис. 90, *в* є дотичною площиною до циліндра.

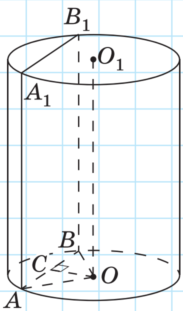



**Рис. 91**

**Задача**

Радіус циліндра дорівнює 5 см. Переріз, паралельний осі циліндра й віддалений від неї на 4 см, має площу 42 см$^2$. Знайдіть висоту циліндра.

**Розв'язання**

Нехай дано циліндр із віссю $OO_1$ (рис. 91), $AA_1B_1B$ — переріз циліндра площиною, паралельною осі, $S_{AA_1B_1B} = 42$ см$^2$. Оскільки $A_1A \perp (AOB)$ як твірна циліндра, то за ознакою перпендикулярності площин площина даного перерізу перпендикулярна до площини основи. Крім того, оскільки переріз циліндра, паралельний осі, — прямокутник, то $AA_1 = \frac{42}{AB}$.

Проведемо в площині $AOB$ перпендикуляр $OC$ до прямої $AB$. Тоді $OC \perp (A_1AB)$ як перпендикуляр до прямої перетину двох перпендикулярних площин.

Отже, відрізок $OC$ — відстань від осі циліндра до площини перерізу; за умовою задачі $OC = 4$ см. Знайдемо висоту циліндра.

Проведемо радіуси циліндра $OA$ і $OB$. Відрізок $OC$ — медіана й висота рівнобедреного трикутника $AOB$. Отже, з трикутника $AOC$ ($\angle C = 90°$, $OA = 5$ см, $OC = 4$ см) за теоремою Піфагора $AC = 3$ см. Тоді $AB = 2AC$, $AB = 6$ см.

Отже, $AA_1 = \frac{42}{6} = 7$ (см).

Відповідь: 7 см.

## 7.3. Види означень

Як ми вже зазначали, в геометрії існують різні підходи до означення основних фігур. Різні способи означення понять використовуються і в інших науках. Опишемо найбільш поширені види означень.

Означення як логічна операція має вирішувати два завдання — вирізняти означуваний предмет і відокремлювати його від усіх інших. Тому більшість наукових означень є означеннями через найближчий рід і видову відмінність (у логіці такі означення називають ***класичними***). Пояснимо особливості класичного означення на прикладі відомого вам означення куба: «Кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якому всі ребра рівні». У цьому означенні спочатку виділяється найближчий рід многогранників, до якого належить куб,— прямокутні паралелепіпеди, а потім описується відмінність, яка відокремлює куб від решти прямокутних паралелепіпедів, — рівність усіх ребер.

До класичних належить також і більшість означень у природничих і гуманітарних науках. Наприклад, у філології архаїзмом називається слово, яке застаріло і вийшло із загального вжитку. Для цього означення архаїзму використовується найближчий рід («слово») і видова відмінність, яка полягає в застарілості даного слова.

Різновидом класичних є так звані ***генетичні*** означення, в яких видова відмінність описує спосіб утворення означуваного предмета. Наприклад, замість означення прямого кругового циліндра, наведеного в п. 7.2, можна було б дати рівносильне генетичне означення: «Циліндром називається тіло, яке утворюється при обертанні прямокутника навколо його сторони».

Окрім означень, які явно вказують на тотожність двох понять — означуваного і того, що означає, існують й інші, неявні означення. Пригадаємо, наприклад, означення піраміди: «Пірамідою називається многогранник, що складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину з точками основи». У контексті цього означення ми описали, окрім піраміди, ще два поняття — основу піраміди й вершину піраміди, а інакше кажучи, дали ***контекстуальне*** означення цих двох понять.

Іншим видом неявних означень є означення шляхом показу. Уявімо, наприклад, що нам необхідно пояснити співрозмовнику, який колір має назву «індиго». Звичайно, найбільш дієвий спосіб пояснення — показати предмет або зображення, що має означуваний колір. Означення шляхом показу в логіці називають ***остенсивними***. Зокрема, в курсі геометрії ми використали остенсивні означення для окремих видів напівправильних та зірчастих многогранників (п. 6.2).

Цікаві вироби у формі зірчастих многогранників роблять з паперу у техніці оригамі. Їх теж, як говориться в прислів'ї, краще один раз побачити, ніж сто разів про них почути.

У науці, навчанні, повсякденному житті залежно від конкретної ситуації доречними можуть виявитися різні види означень. Але головна мета не зазнає змін — означення мають сприяти процесу спілкування між людьми, допомагати їм краще розуміти одне одного. Недарма видатний давньогрецький філософ Сократ казав, що завдяки правильним означенням він продовжує справу своєї матері-акушерки, допомагаючи народженню істини в спорі.

# Запитання і задачі

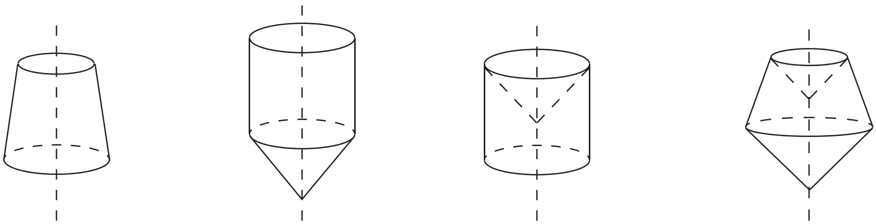
## Обговорюємо теорію

**300.**• Які з предметів, зображених на рис. 92, мають форму тіл обертання?

а б в г

**Рис. 92**

**301.**• Яке з тіл, зображених на рис. 93, *а–г*, утворюється внаслідок обертання прямокутної трапеції навколо меншої бічної сторони; навколо меншої основи?



а б в г

**Рис. 93**

**302.**• Чи має циліндр центр симетрії; вісь симетрії? Скільки площин симетрії має циліндр? Чи існують площини симетрії циліндра, які не містять його вісь?

**303.** Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «тіло обертання», «циліндр», «твірна циліндра».

## Моделюємо

**304.°** Розріжте цукерку циліндричної форми так, щоб площина перерізу не була перпендикулярною до осі циліндра. Чи є отриманий переріз кругом?

**305.** За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання зобразіть циліндр. Розташуйте його так, щоб він виглядав як:

а) прямокутник;

б) круг.

## Розв'язуємо задачі

### Рівень А

**306.°** Знайдіть площу осьового перерізу циліндра з радіусом 2 см і висотою 3 см.

**307.°** Дано циліндр із радіусом $R$, висотою $H$ і площею осьового перерізу $S$. Знайдіть:

а) $S$, якщо $R=4$ м, $H=3$ м;

б) $H$, якщо $S=36$ см$^2$, $R=2$ см;

в) $R$, якщо $S=24$ см$^2$, $H=4$ см.

**308.** Прямокутник зі сторонами 8 см і 3 см обертається навколо сторони. Знайдіть діагональ осьового перерізу утвореного циліндра. Скільки розв'язків має задача?

**309.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

**310.** Осьовий переріз циліндра — квадрат із діагоналлю $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу перерізу, паралельного осі циліндра, якщо діагональ цього перерізу дорівнює 10 см.

**311.** Площа осьового перерізу рівностороннього циліндра дорівнює 64 см$^2$. Знайдіть площу основи циліндра.

**312.** Діагональ перерізу циліндра, паралельного осі, нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює 6 см, а хорда, по якій площина перерізу перетинає основу, стягує дугу 60°.

**313.** Висота циліндра дорівнює 24 см. Переріз циліндра, паралельний осі й віддалений від неї на 5 см, має форму квадрата. Знайдіть площу основи циліндра.

## Рівень Б

**314.** Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням:
а) рівнобедреного трикутника з основою $a$ і кутом $120°$ навколо бічної сторони;
б) правильного шестикутника зі стороною 4 см навколо сторони.
Зробіть відповідні рисунки.

**315.** Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням:
а) паралелограма зі сторонами 7 см і 15 см та діагоналлю 20 см навколо найбільшої сторони;
б) ромба зі стороною $a$ та кутом $45°$ навколо сторони.
Зробіть відповідні рисунки.

**316.** Діагональ осьового перерізу циліндра нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть:
а) висоту й радіус циліндра, якщо площа перерізу дорівнює $S$;
б) площу осьового перерізу, якщо хорда основи, яка стягує дугу $60°$, дорівнює $m$.

**317.** Переріз циліндра, паралельний осі й віддалений від неї на відстань, що дорівнює половині радіуса, має площу $S$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**318.** Хорду основи циліндра видно з центра цієї основи під кутом $\alpha$. Відрізок, що сполучає центр іншої основи із серединою даної хорди, дорівнює $d$ й утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть висоту і радіус циліндра.

**319.** Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\pi:4$. Доведіть, що даний циліндр рівносторонній.

**320.** Паралельно осі циліндра проведено площину, яка віддалена від осі на відстань $m$ і відтинає від кола основи дугу $\alpha$. Кут між діагоналлю утвореного перерізу і твірною циліндра дорівнює $\beta$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**321.** Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу $\alpha$. Відрізок, що сполучає центр основи циліндра з точкою кола іншої основи, дорівнює $l$ і утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу перерізу.

**322.** Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи, площі яких дорівнюють 11 $см^2$ і 60 $см^2$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**323.** Через твірну циліндра $AA_1$ проведено осьовий переріз $AA_1B_1B$, площа якого дорівнює $Q$, і переріз $AA_1C_1C$, площина якого утворює з площиною даного осьового перерізу кут $\varphi$. Знайдіть площу перерізу $BB_1C_1C$.

**324.** Переріз циліндра, який має площу $S$, паралельний осі циліндра і відтинає від кола основи дугу $\alpha$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

## Рівень В

**325.** Площина, яка утворює з площинами основ циліндра кути $60°$, перетинає основи циліндра по хордах завдовжки 6 см і 8 см. Радіус циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть його висоту. Скільки розв'язків має задача?

**326.** Площина $\alpha$ перетинає площини основ циліндра по прямих, які дотикаються до основ циліндра в точках $A$ і $B$. Знайдіть довжину відрізка $AB$, якщо кут між площиною $\alpha$ і площиною основи дорівнює $\varphi$ ($\varphi \neq 90°$), а радіус циліндра $R$.

**327.** Кінці відрізка $AB$, довжина якого дорівнює 25 см, лежать на колах основ циліндра. Знайдіть:

а) відстань від даного відрізка до осі циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 15 см, а радіус 26 см;

б) площу осьового перерізу циліндра, якщо радіус циліндра дорівнює 20 см, а відстань від осі до прямої $AB$ становить 16 см.

**328.** Вершини квадрата лежать на колах основ циліндра, радіус якого дорівнює 10,5 см, а висота 3 см. Знайдіть сторону квадрата. Скільки розв'язків має задача?

**329.** Переріз циліндра, паралельний осі, перетинається з осьовим перерізом, причому пряма перетину ділить осьовий переріз на частини з площами 4 см$^2$ і 36 см$^2$, а переріз, паралельний осі, — на дві рівновеликі частини. Знайдіть площу перерізу, паралельного осі.

## Повторення перед вивченням § 8

### Теоретичний матеріал

- довжина кола і площа круга; 9 клас, § 19
- розв'язування прямокутних трикутників. 8 клас, § 21

### Задачі

**330.** З точки $A$, яка не належить площині $\alpha$, проведено до цієї площини перпендикуляр $AD$ та дві рівні похилі $AB$ і $AC$. Знайдіть кут між площинами $ABC$ і $\alpha$, якщо $AB = AC = 26$ см, $BC = 48$ см, $AD = 5$ см.

**331.** З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди. Знайдіть радіус кола, якщо відстані від центра кола до даних хорд дорівнюють 9 см і 12 см.

# § 8 Конус. Зрізаний конус

## 8.1. Конус і його елементи

### Означення

**Конусом** (точніше, **круговим конусом**) називається тіло, яке складається з круга (***основи конуса***), точки, що не належить площині цього круга (***вершини конуса***), і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи.

Відрізки, які сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються ***твірними конуса***.

**Конус** — від грецького «конос» — соснова шишка.

Конус називається ***прямим***, якщо пряма, що проходить через вершину конуса і центр кола основи, перпендикулярна до площини основи (рис. 94). *Оскільки в шкільному курсі розглядатимуться лише прямі кругові конуси, далі домовимося називати їх просто конусами.*

На рис. 94 зображено конус із вершиною $P$ і центром основи $O$. Відрізок $PA$ є твірною цього конуса, а відрізок $OA$ — радіусом його основи, або радіусом конуса.

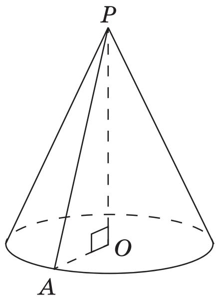



**Рис. 94.** Конус

***Висотою конуса*** називається перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи. Очевидно, що в конусі висота сполучає вершину з центром основи. Наприклад, на рис. 94 висотою конуса є відрізок $PO$.

Усі твірні конуса є похилими до площини основи, які проведені з вершини конуса і мають рівні проекції. Звідси випливає, що ***всі твірні конуса рівні й утворюють однакові кути з площиною основи***.

Конус є тілом обертання, яке утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо його катета. Наприклад, на рис. 94 зображено конус, утворений обертанням прямокутного трикутника $POA$ навколо катета $PO$. Таким чином, ***пряма, яка містить висоту конуса, є його віссю***.

а б в г

**Рис. 95.** Конічні форми

Форми конусів (інакше їх називають конічними формами) відтворені в природі й техніці, архітектурі й предметах повсякденного вжитку (рис. 95).

Наприклад, у фізиці, будівництві, сільському господарстві й гірничому ділі використовується поняття кута природного ухилу сипкого матеріалу, тобто кута нахилу до площини основи твірної конуса, який утворюється вільною поверхнею насипу (рис. 96). Цей кут пов'язаний з коефіцієнтом тертя й залежить від складу, форми, вологості й питомої ваги матеріалу (для піску він становить від 20° до 40°, для ґрунту — від 17° до 55°, для жита — від 20° до 30°). За кутом природного ухилу визначають, зокрема, максимально допустимі кути укосу кар'єрів, насипів, штабелів тощо.


**Рис. 96.** Конічний насип

## 8.2. Перерізи конуса. Зрізаний конус

Розглянемо деякі види перерізів конуса.

Переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину, є рівнобедреним трикутником, бічні сторони якого — твірні даного конуса (рис. 97, *а*). Зокрема, рівнобедреним трикутником є осьовий переріз конуса (рис. 97, *б*), причому висотою цього трикутника є висота конуса, а основою — діаметр основи конуса. Якщо діаметр основи конуса дорівнює твірній, то осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник —

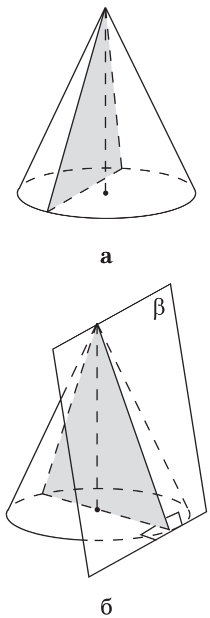



**Рис. 97.** Перерізи конуса, що проходять через його вершину

такий конус називається ***рівностороннім***. Площина осьового перерізу є площиною симетрії конуса (обґрунтуйте цей факт самостійно).

Площина, яка проходить через твірну конуса та перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну, називається ***дотичною площиною до конуса***. Площина $\beta$ на рис. 97, *б* є дотичною до конуса.

На окрему увагу заслуговує переріз конуса, паралельний площині основи.

## Теорема (про переріз конуса, паралельний площині основи)

Площина, яка паралельна площині основи конуса і перетинає його твірні, відтинає менший конус, центр основи якого лежить на висоті заданого конуса, а твірні, висоти й радіуси основ меншого й заданого конусів є пропорційними відрізками.

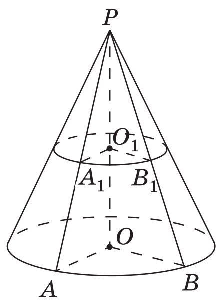



**Рис. 98.** До доведення теореми про переріз конуса, паралельний площині основи

### Доведення

☐ Нехай дано конус із вершиною $P$, центром основи $O$ та твірною $PA$ (рис. 98). Через точку $A_1$ відрізка $AP$ проведемо січну площину $\alpha$, паралельну площині основи конуса.

Оскільки точки $P$ і $A$ лежать по різні боки від площини $\alpha$, а точки $A$ і $O$ — по один бік від неї, то площина $\alpha$ перетинає висоту $PO$ конуса. Так само вона перетинає будь-яку твірну конуса, наприклад $PB$. Позначимо точки перетину площини $\alpha$ з висотою і твірною конуса $O_1$ і $B_1$ відповідно. Прямокутні трикутники $PAO$ і $PA_1O_1$ є подібними, оскільки мають спільний кут $P$, тому

$$\frac{A_1O_1}{AO}=\frac{PO_1}{PO}=k.$$

Аналогічно, подібними є трикутники $PBO$ і $PB_1O_1$. Очевидно, що коефіцієнт подібності для них також дорівнює $k$: $\frac{B_1O_1}{BO}=\frac{PO_1}{PO}=k$.

Але ж прямокутні трикутники $PAO$ і $PBO$ рівні за двома катетами. Тому рівні й трикутники $PA_1O_1$ і $PB_1O_1$. Звідси випливає, що переріз конуса площиною $\alpha$ є кругом із центром у точці $O_1$, і площина $\alpha$ відтинає менший конус, основою якого є цей круг, а твірною — відрізок $PA_1$.

Отже, ми отримали, що твірні, висоти і радіуси основ меншого і заданого конусів є пропорційними відрізками: $\dfrac{PA_1}{PA} = \dfrac{PO_1}{PO} = \dfrac{A_1O_1}{AO} = k$.

Теорему доведено. ■

## Наслідок

Площа перерізу конуса, паралельного площині основи, і площа основи відносяться як квадрати відстаней від вершини конуса до площин перерізу й основи.

Отже, площина, яка паралельна площині основи конуса й перетинає його твірні, відтинає менший конус і тіло, яке називається ***зрізаним конусом***. Основа даного конуса і круг, отриманий у перерізі, є ***основами зрізаного конуса***, а перпендикуляр, проведений із точки однієї основи до площини іншої основи,— ***висотою зрізаного конуса***. Очевидно, що висотою зрізаного конуса є, зокрема, відрізок, що сполучає центри його основ. Відрізки твірних даного конуса, обмежені площинами основ зрізаного конуса, є ***твірними зрізаного конуса***. Усі твірні зрізаного конуса рівні й однаково нахилені до площини кожної з основ (поясніть чому).

На рис. 99 зображено зрізаний конус з висотою $OO_1$ і твірною $AA_1$.

Зрізаний конус є тілом, яке утворюється обертанням прямокутної трапеції навколо її меншої бічної сторони. Зокрема, на рис. 99 зображено зрізаний конус, утворений обертанням прямокутної трапеції $OO_1A_1A$ навколо сторони $OO_1$. Отже, ***пряма, яка проходить через центри основ зрізаного конуса, є його віссю.***

Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція, основами якої є діаметри основ зрізаного конуса, а бічними сторонами — його твірні. Наприклад, на рис. 100 осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція $AA_1B_1B$.

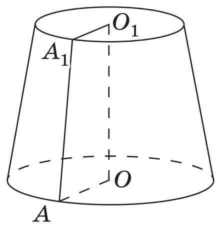



**Рис. 99.** Зрізаний конус

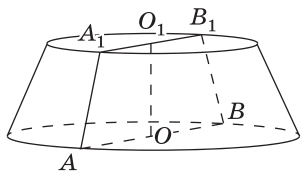



**Рис. 100.** Осьовий переріз зрізаного конуса

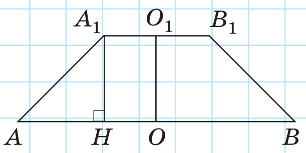



**Рис. 101**

**Задача**

Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють $R$ і $r$ ($R > r$), а твірна нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу осьового перерізу.

**Розв'язання**

Нехай рівнобічна трапеція $AA_1B_1B$ (рис. 101) — осьовий переріз зрізаного конуса з центрами основ $O$ і $O_1$ (див. рис. 100). За умовою задачі $AO = R$, $A_1O_1 = r$, отже, $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$. Оскільки площина перерізу містить пряму $OO_1$, то за ознакою перпендикулярності площин площина перерізу перпендикулярна до площини основи.

Проведемо $A_1H \perp AB$. Тоді пряма $A_1H$ перпендикулярна до площини основи конуса за властивістю перпендикуляра до прямої перетину двох перпендикулярних площин. Відрізок $AH$ — проекція твірної $A_1A$ на площину більшої основи конуса. Тоді кут $A_1AH$ — кут між твірною і площиною основи; за умовою задачі $\angle A_1AH = 45°$. Оскільки $O_1O$ і $A_1H$ — висоти трапеції, то $OH = O_1A_1 = r$, $AH = R - r$. Із трикутника $A_1AH$ ($\angle H = 90°$, $\angle A = 45°$, $AH = R - r$) маємо $A_1H = R - r$. Отже, для площі осьового перерізу $AA_1B_1B$ отримуємо:

$$S = \frac{A_1B_1 + AB}{2} \cdot AH, \quad S = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = R^2 - r^2.$$

Відповідь: $R^2 - r^2$.

Зауважимо, що в деяких задачах про зрізаний конус доцільно розглядати повний конус, із якого утворений даний зрізаний конус.

# Запитання і задачі

## Обговорюємо теорію

**332.**° Чи завжди твірна конуса більша за його висоту? Чи завжди висота конуса більша за радіус його основи?

**333.°** Чи може осьовий переріз конуса бути:
а) прямокутним трикутником;
б) трикутником із кутами 50°, 60° і 70°;
в) трикутником із кутами 15°, 15° і 150°?

**334.** Переріз конуса, паралельний площині основи, проходить через середину висоти. У скільки разів площа перерізу менша за площу основи конуса?

**335.** Чи є зрізаний конус окремим випадком конуса?

**336.** Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «конус», «вершина конуса», «твірна конуса», «переріз конуса», «зрізаний конус».

## Моделюємо

**337.°** Заповніть водою до половини колбу або склянку конічної форми та трохи нахиліть її. Зобразіть лінію, по якій поверхня води торкається стінок посудини. Чи є ця лінія колом?

**338.°** Насипте на стіл невеликі кількості цукру, борошна, крупів так, щоб утворилися конусоподібні гірки. Чи однакову форму вони мають? Яка з узятих сипких речовин має найбільший кут природного ухилу?

**339.** Знайдіть у мережі Інтернет інформацію щодо формули, якою задається конус у декартовій системі координат у просторі. За допомогою програми 3D Grapher або іншої програми для побудови графіків у 3D-середовищі побудуйте конус та визначте кут між його твірною та висотою.

## Розв'язуємо задачі

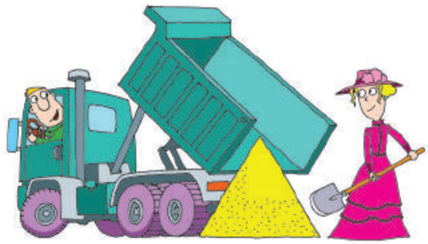
### Рівень А

**340.°** Твірна конуса дорівнює 25 см, а висота 24 см. Знайдіть радіус основи конуса і площу осьового перерізу.

**341.°** Прямокутний трикутник із гіпотенузою 18 см і гострим кутом 30° обертається навколо катета, прилеглого до даного кута. Знайдіть висоту і радіус основи утвореного конуса. Визначте вид його осьового перерізу.

**342.** Висота конуса дорівнює $H$. Знайдіть твірну і радіус основи конуса, якщо твірна нахилена до площини основи під кутом $\alpha$.

**343.** Купа піску заввишки 1,5 м має форму конуса. Знайдіть площу частини будмайданчика, яку займає купа, якщо кут природного ухилу піску дорівнює $25°$.



**344.** Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює $30°$.

**345.** Радіус основи конуса дорівнює $R$, а кут між твірною і висотою $60°$. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві взаємно перпендикулярні твірні.

**346.** Висота конуса дорівнює 12 м, а радіус основи $\sqrt{145}$ м. Переріз, проведений через вершину, перетинає основу конуса по хорді, віддаленій від центра основи на 9 м. Знайдіть площу перерізу.

**347.** Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено переріз, площа якого дорівнює $2\sqrt{21}$ см$^2$. Даний переріз перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра основи конуса під кутом $60°$. Знайдіть висоту конуса.

**348.** Висота конуса дорівнює 24 см. На відстані 8 см від вершини конуса проведено переріз, паралельний площині основи. Знайдіть:

а) довжини відрізків, на які даний переріз ділить твірну, якщо довжина твірної дорівнює 30 см;

б) площу основи конуса, якщо площа даного перерізу дорівнює $9\pi$ см$^2$.

**349.** Радіус основи конуса дорівнює 16 см. Паралельно площині основи проведено переріз, площа якого дорівнює $16\pi$ см$^2$. Знайдіть висоту конуса, якщо даний переріз віддалений від вершини конуса на 5 см.

**350.** Прямокутна трапеція $ABCD$ (рис. 102) обертається навколо сторони $AB$. Визначте довжини радіусів основ і висоти утвореного зрізаного конуса.

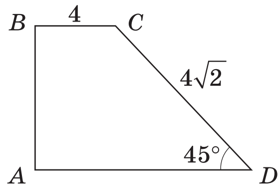



**Рис. 102**

**351.** Дано зрізаний конус. Знайдіть:
а) твірну, якщо радіуси основ конуса дорівнюють 2 м і 5 м, а висота 4 м;
б) висоту, якщо радіуси основ конуса дорівнюють 3 м і 5 м, а твірна нахилена до площини основи під кутом 45°.

**352.** Прямокутна трапеція з бічними сторонами 12 см і 13 см та меншою основою 3 см обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть площу осьового перерізу отриманого зрізаного конуса.

**353.** Площі основ зрізаного конуса дорівнюють $9\pi$ см$^2$ і $49\pi$ см$^2$. Знайдіть площу перерізу, який паралельний площинам основ і проходить через середину висоти конуса.

## Рівень Б

**354.** Площа осьового перерізу конуса дорівнює $9\sqrt{3}$ см$^2$. Знайдіть радіус основи і висоту конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом 30°.

**355.** Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо радіус його основи дорівнює 15 см, а центр основи віддалений від твірної на 12 см.

**356.** Переріз, проведений через вершину конуса, перетинає його основу по хорді завдовжки 18 см, яку видно з центра основи під кутом 60°. Площа даного перерізу дорівнює 162 см$^2$. Знайдіть кут нахилу площини перерізу до площини основи конуса.

**357.** Через вершину конуса проведено переріз, площа якого дорівнює $S$. Площина перерізу перетинає основу конуса по хорді, яку видно з вершини конуса під кутом $\beta$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом $\alpha$.

**358.** Через вершину конуса, висота якого дорівнює $H$, проведено площину, нахилену до площини основи під кутом $\varphi$. Утворений переріз перетинає основу конуса по хорді, що стягує дугу $\alpha$ ($\alpha < 180°$). Знайдіть площу перерізу.

**359.** Висота конуса дорівнює 18 см, а площа його основи $63\pi$ см$^2$. Знайдіть довжини відрізків, на які ділять висоту два перерізи, паралельні площині основи, якщо площі цих перерізів становлять $7\pi$ см$^2$ і $28\pi$ см$^2$.

**360.** Радіус основи конуса дорівнює 12 см. Знайдіть площі перерізів, які перпендикулярні до висоти конуса і ділять її на три рівні частини.

**361.** Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як $2:5$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його твірна дорівнює $6\sqrt{2}$ см і нахилена до площини основи під кутом 45°.

**362.** Площі основ зрізаного конуса дорівнюють $49\pi$ см$^2$ і $625\pi$ см$^2$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо відомо, що цей переріз можна вписати в коло більшої основи.

**363.** Знайдіть твірну зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 4 см і 8 см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 30°.

## Рівень В

**364.** Радіус основи конуса 12 см, а висота 5 см. Яку найбільшу площу може мати переріз, який проходить через вершину конуса?

**365.** Через середину висоти конуса проведено пряму, паралельну його твірній $l$. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься всередині конуса.

**366.** Через вершину конуса проведено січну площину під кутом $\alpha$ до площини основи. Вона перетинає основу конуса по хорді, яка стягує дугу $\beta$ $(\beta < 180°)$. Точка висоти конуса, віддалена від даної хорди на відстань $d$, рівновіддалена від площини перерізу й площини основи. Знайдіть площу перерізу.

**367.** Площина перерізу конуса, яка проходить через його вершину, віддалена від середини висоти на 6 см. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 25 см, а висота 20 см.

**368.** Висота конуса дорівнює 24 см, а твірна — 26 см. Пряма, яка перетинає конус і паралельна площині його основи, віддалена від висоти конуса на 3 см, а від площини основи — на 12 см. Знайдіть довжину відрізка даної прямої, що міститься всередині конуса.

**369.** Твірна зрізаного конуса дорівнює сумі радіусів його основ, а висота — їх різниці. Знайдіть відношення радіусів основ конуса.

# Повторення перед вивченням § 9

## Теоретичний матеріал

- коло; дотична до кола; 7 клас, § 19, 20
- рівняння кола. 9 клас, § 7

## Задачі

**370.** На площині пряма $AB$ дотикається до кола з радіусом 12 см у точці $C$. Знайдіть довжину відрізка $AB$, якщо точки $A$ і $B$ віддалені від центра кола на 15 см і 20 см відповідно.

**371.** Відрізок $AO$ — перпендикуляр до площини кола з центром $O$ і радіусом 6 см. Знайдіть відстань від точки $A$ до:

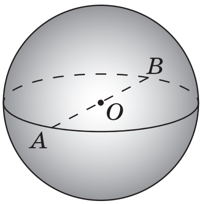
а) дотичної до даного кола, якщо $AO = 8$ см;

б) хорди кола, яка стягує дугу $60°$, якщо $AO = 5$ см.

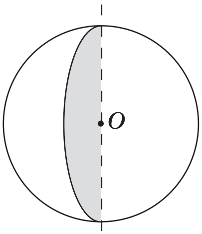
# §9 Куля і сфера. Площина, дотична до сфери

## 9.1. Куля та її перерізи

Як відомо, множина всіх точок площини, віддалених від даної точки на відстань, що не перевищує задану, є кругом. У просторі всі точки, які мають описану властивість, утворюють кулю (рис. 103, *а*).




а




б

**Рис. 103.** Куля

### Означення

**Кулею** називається множина всіх точок простору, віддалених від даної точки на відстань, що не перевищує задану.

Дану точку називають ***центром кулі***, а задану відстань — ***радіусом кулі***.

**Сферою** називається поверхня кулі.

Таким чином, сфера складається з усіх точок простору, віддалених від центра кулі (він є також центром сфери) на задану відстань $R$ (радіус сфери). Радіусом кулі (сфери) називається також будь-який відрізок, що сполучає центр із точкою сфери. На рис. 103, *а* таким є відрізок $OA$.

Відрізок, що сполучає дві точки сфери, називається ***хордою сфери***. Хорда, яка проходить через центр сфери, називається ***діаметром кулі*** (сфери). Кінці діаметра називають ***діаметрально протилежними точками***. На рис. 103, *а* точки $A$ і $B$ — діаметрально протилежні точки сфери, $AB$ — діаметр кулі (сфери).

Куля є тілом обертання, яке утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра (рис. 103, *б*).

Розглядаючи взаємне розміщення кулі й площини в просторі, доречно провести аналогію з розміщенням круга і прямої на площині

**Сфера** — від грецького «сфайра» — кругле тіло.

(рис. 104, *а*–*в*). Три випадки розміщення кулі відносно площини визначаються співвідношенням між радіусом кулі і відстанню від її центра до площини:

1) якщо відстань від центра кулі до площини більша за радіус кулі, то куля й площина не мають спільних точок (рис. 105, *а*): справді, якщо $OA \perp \alpha$, то для будь-якої точки $M$ площини $\alpha$ $OM \geqslant OA > R$, тобто площина $\alpha$ не містить точок кулі;

2) якщо відстань від центра кулі до площини дорівнює радіусу кулі, то площина має з кулею (та сферою, яка її обмежує) єдину спільну точку (рис. 105, *б*): у цьому випадку для довільної точки $M$ площини $\alpha$, яка не збігається з $A$, $OM > OA = R$, тобто площина $\alpha$ має з кулею єдину спільну точку $A$ (докладніше цей випадок розглянемо в п. 9.2);

3) якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то куля і площина перетинаються по кругу (рис. 105, *в*).

Розглянемо останній випадок докладніше.

### Теорема (про переріз кулі)

Якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то перерізом кулі даною площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до площини перерізу.

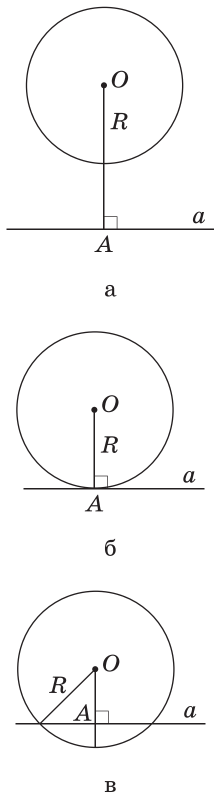



**Рис. 104.** Взаємне розміщення круга і прямої на площині

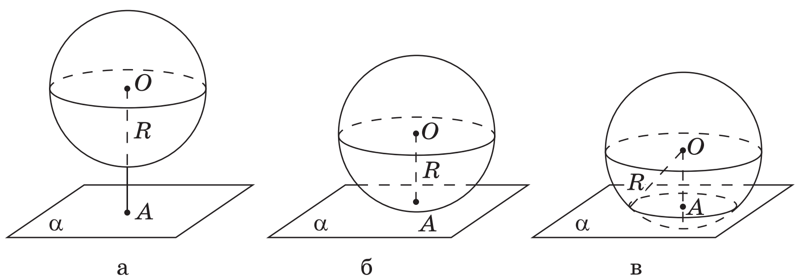



**Рис. 105.** Взаємне розміщення кулі й площини в просторі

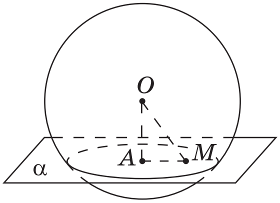



**Рис. 106.** До доведення теореми про переріз кулі

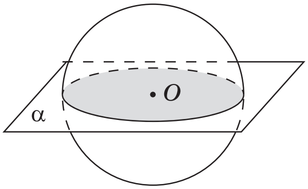
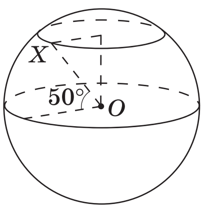



**Рис. 107.** Діаметральна площина і великий круг

а




б

**Рис. 108.** Застосування перерізів кулі в географії

### Доведення

□ Нехай $\alpha$ — січна площина кулі з центром $O$ і радіусом $R$, $OA \perp \alpha$ (рис. 106). Розглянемо довільну точку $M$ кулі, яка належить площині $\alpha$. З прямокутного трикутника $OAM$ ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора $OM^2 = OA^2 + AM^2$. Оскільки $OM \leqslant R$, то $AM \leqslant \sqrt{R^2 - OA^2}$, тобто відстань від точки $A$ до точки $M$ не перевищує $r = \sqrt{R^2 - OA^2}$. Це означає, що довільна точка $M$ перерізу належить кругу з центром $A$ і радіусом $r$, і навпаки: довільна точка $M$ цього круга є точкою кулі (обґрунтуйте це самостійно). Отже, перерізом кулі площиною $\alpha$ є круг із центром у точці $A$.

Теорему доведено. ■

### Наслідок

Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло. Центр цього кола є основою перпендикуляра, проведеного з центра сфери до площини перерізу.

Зауважимо, що у випадку, коли січна площина проходить через центр кулі (таку площину називають ***діаметральною***), центри кулі й перерізу збігаються, а радіус перерізу дорівнює радіусу кулі (рис. 107).

Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії (доведіть це самостійно).

Переріз кулі діаметральною площиною називають ***великим кругом***, а коло цього перерізу — ***великим колом***.

Наприклад, на географічному глобусі одне з великих кіл є лінією екватора (рис. 108, *а*). Географічні паралелі є лініями перерізів поверхні Землі площинами, паралельними площині екватора, а градуси північної й південної широти вказують кут між відповідними радіусами земної кулі — наприклад, місто Харків розташоване на 50° північної широти (рис. 108, *б*).

**Задача**

Через кінець радіуса кулі проведено площину під кутом 45° до даного радіуса. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

**Розв'язання**

Нехай круг із центром $O_1$ — переріз кулі з центром $O$ і радіусом $OA=6$ см (рис. 109). Тоді за теоремою про переріз кулі $OO_1$ — перпендикуляр до площини перерізу. Отже, $O_1A$ — проекція радіуса $OA$ на площину перерізу, $\angle OAO_1$ — кут між $OA$ та площиною перерізу; за умовою задачі $\angle OAO_1=45°$. Знайдемо площу перерізу.

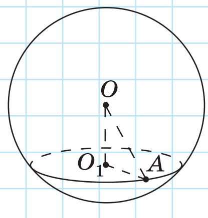


**Рис. 109**

З трикутника $OAO_1$ ($\angle O_1=90°$, $\angle A=45°$, $OA=6$ см) $O_1A=OA\cos 45°$,

$$O_1A=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Шукана площа $S$ дорівнює $\pi r^2$, де $r=O_1A$. Отже, $S=\pi\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2=18\pi$ (см$^2$).

Відповідь: $18\pi$ см$^2$.

## 9.2. Дотична площина до сфери

Розглянемо докладніше випадок, коли куля і площина мають єдину спільну точку.

### Означення

**Дотичною площиною до сфери (кулі)** називається площина, яка має зі сферою єдину спільну точку.

Спільна точка дотичної площини і сфери називається ***точкою дотику***. На рис. 110 площина $\alpha$ дотикається до сфери (кулі) з центром $O$ в точці $A$.

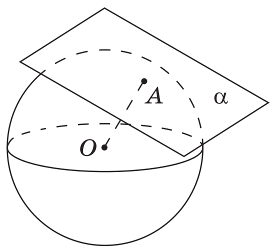


**Рис. 110.** Дотична площина до сфери

Визначимо взаємне розміщення дотичної площини й радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

### Теорема (властивість дотичної площини)

**Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.**

Доведення

□ Нехай площина $\alpha$ дотикається до сфери з центром $O$ в точці $A$ (рис. 111). Доведемо методом від супротивного, що $OA \perp \alpha$.

Якщо це не так, то відрізок $OA$ є похилою до площини $\alpha$. Проведемо перпендикуляр $OB$ до площини $\alpha$. Очевидно, що $OB < OA$, тобто відстань від центра сфери до точки $B$ менша за радіус сфери. Звідси випливає, що сфера й площина $\alpha$ перетинаються по колу. Але це суперечить тому, що площина $\alpha$ є дотичною, тобто сфера й площина $\alpha$ мають єдину спільну точку. Отже, наше припущення хибне, і $OA \perp \alpha$. ■

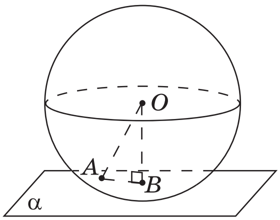


**Рис. 111.** До доведення властивості дотичної площини

Справедливим є також обернене твердження (***ознака дотичної площини***): **якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, яка проходить через другий кінець радіуса, то дана площина є дотичною до сфери.**

Доведіть це твердження самостійно.

### Означення

**Дотичною прямою до сфери (кулі)** називається пряма, яка належить дотичній до даної сфери (кулі) площині і проходить через точку дотику.

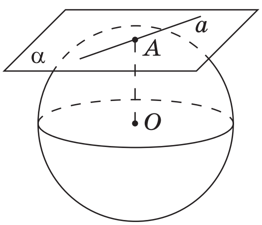


**Рис. 112.** Дотична пряма до сфери

Зі щойно доведеної властивості дотичної площини випливає, що дотична пряма перпендикулярна до радіуса сфери (кулі), проведеного в точку дотику. На рис. 112 площина $\alpha$ — дотична площина до сфери з центром $O$, пряма $a$ —

дотична пряма, яка дотикається до даної сфери в точці $A$, $OA \perp a$.

Очевидно, що всі прямі площини $\alpha$, які проходять через точку $A$, є дотичними прямими до сфери. Більше того, пряма, яка проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, є дотичною прямою до сфери (обґрунтуйте цей факт самостійно).

### Задача

Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника 3 см.

### Розв'язання

Нехай сторони трикутника $ABC$ дотикаються до кулі з центром $O$ в точках $K$, $M$ і $N$ (рис. 113). Проведемо перпендикуляр $OO_1$ до площини $ABC$. Оскільки $AB$, $BC$ і $AC$ — дотичні до кулі, то $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$. Відрізки $O_1K$, $O_1M$ і $O_1N$ — проекції похилих $OK$, $OM$ і $ON$ на площину $ABC$. За теоремою про три перпендикуляри $O_1K \perp AB$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AC$. Оскільки $OK = OM = ON$ як радіуси кулі, точка $O$ рівновіддалена від сторін трикутника $ABC$. Отже, точка $O_1$ — центр кола, вписаного в трикутник $ABC$, а відрізки $OK$, $OM$, $ON$ — радіуси цього кола. За формулою радіуса вписаного кола для правильного трикутника $O_1K = O_1M = O_1N = \dfrac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$ (см). З прямокутного трикутника $OO_1K$ ($\angle O_1 = 90^\circ$, $OO_1 = 3$ см, $O_1K = 4$ см) за теоремою Піфагора $OK = 5$ см.

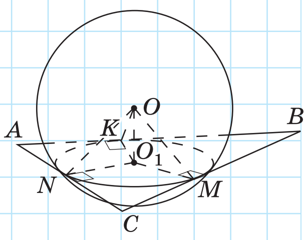


Рис. 113

Відповідь: 5 см.

## 9.3. Геометричні тіла та їх поверхні

Поняття «геометричне тіло» є одним із центральних понять стереометрії. Але для того щоб дати строге означення геометричного тіла, необхідно ввести декілька допоміжних понять.

Отже, точка називається ***межовою точкою фігури***, якщо серед скільки завгодно близьких до неї точок є як точки, що належать даній фігурі, так і точки, що не належать їй. Наприклад, нехай на рис. 114 точка $A$ є межовою точкою фігури $F$. Тоді це означає, що будь-яка куля з центром $A$ містить як точки фігури $F$, так і точки, що не належать даній фігурі. Множина всіх межових точок утворює ***межу фігури***.

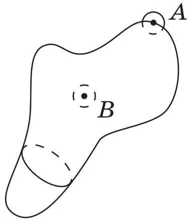



**Рис. 114.** Межові і внутрішні точки фігури

Точка фігури, яка не належить її межі, є ***внутрішньою точкою фігури***. Будь-яка внутрішня точка характеризується тим, що всі точки простору, які розміщені достатньо близько до даної точки, також належать фігурі. Нехай на рис. 114 точка $B$ є внутрішньою точкою фігури $F$. Тоді існує куля з центром $B$, усі точки якої належать фігурі $F$.

Фігуру називають ***обмеженою***, якщо її можна помістити всередину деякої сфери. Очевидно, що відрізок, куб, тетраедр — обмежені фігури, а пряма, площина, двогранний кут — необмежені.

І, нарешті, фігура називається ***областю***, якщо всі її точки внутрішні і будь-які дві з них можна сполучити нерозривною лінією, яка повністю належить цій фігурі. Область разом з її межею називають ***замкненою областю***. Так, тетраедр на рис. 115, *а* є замкненою областю. Але, наприклад, фігура на рис. 115, *б*, що складається з двох тетраедрів зі спільною вершиною, не є замкненою областю, адже будь-яка лінія, що сполучає внутрішні точки різних тетраедрів, проходить через їхню спільну вершину, яка не є внутрішньою точкою фігури. Не є замкненою областю і фігура на рис. 115, *в*,

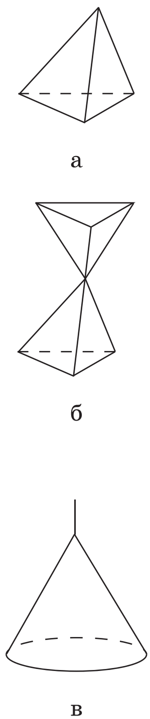



**Рис. 115.** До означення замкненої області

яка являє собою конус зі «шпилем» у вигляді відрізка, оскільки всі точки «шпиля», окрім однієї, не є межовими точками області, обмеженої даним конусом (поясніть чому).

Отже, перейдемо до означення геометричного тіла та його поверхні.

### Означення

**Геометричним тілом** (або просто **тілом**) називається обмежена замкнена область у просторі.

**Поверхнею геометричного тіла** називають його межу.

Зауважимо, що поняття внутрішньої та межової точок і області можна ввести і на площині, якщо в попередніх означеннях цього пункту замість кулі та сфери розглядати круг і коло відповідно. Наприклад, плоский многокутник є обмеженою замкненою областю, межею якої є многокутник.

# Запитання і задачі

## Обговорюємо теорію

**372.**• Діаметр кулі дорівнює 18 см. Чи належить даній кулі точка, віддалена від її центра:

а) на 11 см;
б) на 9 см;
в) на 6 см?

Яка з даних точок належить сфері, що обмежує дану кулю?

**373.** Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «куля», «сфера», «геометричне тіло», «дотична площина».

**374.**• Точки $A$ і $B$ належать сфері з центром $O$ і радіусом 6 см. Чи є дані точки діаметрально протилежними, якщо:

а) $AB = 3$ см;
б) $AB = 6$ см;
в) $AB = 12$ см;
г) $AO = BO$?

**375.** Площина $\alpha$ і сфера з центром $O$ мають спільну точку $A$. Чи мають вони інші спільні точки, якщо:

а) $OA \perp \alpha$;

б) відрізок $OA$ є похилою до площини $\alpha$?

**376.** Радіуси трьох перерізів кулі дорівнюють $r_1$, $r_2$ та $r_3$. Один із даних перерізів є великим кругом. Чому дорівнює радіус кулі, якщо $r_1 < r_3 < r_2$?

## Моделюємо

**377.•** Діаметр кулі можна виміряти за допомогою штангенциркуля (рис. 116). Поясніть принцип такого вимірювання.

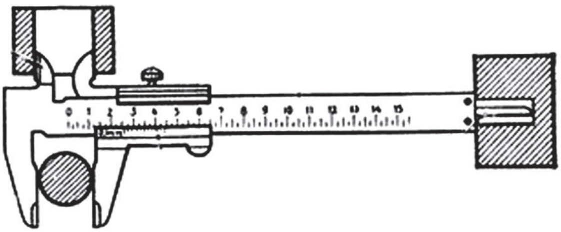


**Рис. 116.** Вимірювання кулі штангенциркулем

**378.** Виготовте з пластиліну модель кулі. Розріжте модель так, щоб площина перерізу не проходила через центр кулі. Якою фігурою є переріз? Як провести перпендикуляр до площини перерізу, який проходить через центр кулі?

**379.** За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання зобразіть сферу радіуса 4. Яким рівнянням задається побудована сфера?

## Розв'язуємо задачі

### Рівень А

**380.•** Точки $A$ і $B$ належать сфері з центром $O$, точка $C$ — середина відрізка $AB$. Знайдіть:

а) відстань від точки $O$ до прямої $AB$, якщо $OA = 17$ см, $AB = 16$ см;

б) радіус сфери, якщо $AB = 12$ см, $OC = 8$ см;

в) довжину відрізка $AB$, якщо діаметр кулі 30 см, $OC = 12$ см.

**381.**• Точки $A$ і $B$ лежать на сфері з центром $O$. Знайдіть радіус сфери, якщо $AB = 8\sqrt{3}$ см, $\angle AOB = 120°$.

**382.**• На відстані $d$ від центра кулі радіуса $R$ проведено переріз площею $S$. Знайдіть:

а) $S$, якщо $d = 12$ см, $R = 13$ см;

б) $R$, якщо $d = 40$ см, а довжина кола перерізу дорівнює $18\pi$ см;

в) $d$, якщо площа перерізу дорівнює $16\pi$ см$^2$, а діаметр кулі 10 см.

**383.** Кожну із 70 кульок на міській новорічній ялинці вирішили прикрасити гірляндою по великому колу. Скільки метрів гірлянд для цього знадобиться, якщо діаметр кожної кульки дорівнює 50 см?

**384.** Переріз сфери має довжину $6\pi$ см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу, якщо радіус, проведений у точку перерізу, нахилений до його площини під кутом 60°.

**385.** Якщо два перерізи кулі рівновіддалені від її центра, то вони рівновеликі. Доведіть. Чи справджується обернене твердження?

**386 (опорна).** ***Якщо з точки простору до сфери проведено дві дотичні прямі, то відстані від даної точки до точок дотику рівні.*** Доведіть.

**387.** Усі сторони квадрата, площа якого дорівнює 100 см$^2$, дотикаються до сфери з радіусом 13 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини квадрата.

**388.** Усі сторони правильного трикутника дотикаються до сфери з радіусом 4 см. Знайдіть площу трикутника, якщо його площина віддалена від центра сфери на 2 см.

**389.** Усі вершини прямокутного трикутника з гіпотенузою 20 см лежать на сфері, радіус якої дорівнює 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

**390.** Знайдіть радіус сфери, яка містить усі вершини прямокутника зі сторонами 18 см і 24 см, якщо центр сфери віддалений від площини прямокутника на 8 см.

## Рівень Б

**391.** Точки $A$ і $B$ лежать на поверхні кулі з радіусом 6 см. Знайдіть відстань між точками $A$ і $B$, якщо відстань між ними по поверхні кулі дорівнює $2\pi$ см.

**392.** Точка $A$ належить кулі з радіусом 5 см і віддалена від центра кулі на 3 см. Знайдіть найбільшу та найменшу відстані від точки $A$ до точок сфери, яка обмежує дану кулю.

**393.** Точки $A$ і $B$ — діаметрально протилежні точки сфери з радіусом 20 см, точка $M$ належить даній сфері. Знайдіть відстані $MA$ і $MB$, якщо $MA = 0{,}75\,MB$.

**394.** Через точку $M$, що належить діаметру кулі $AB$, проведено переріз даної кулі, перпендикулярний до $AB$. Знайдіть:

а) площу перерізу, якщо $AM = 8$ см, $MB = 2$ см;

б) радіус кулі, якщо $AM : MB = 3:1$, а площа перерізу дорівнює $3\pi$ см$^2$.

**395.** Площа великого круга кулі дорівнює $S$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, площа якого дорівнює $\frac{3}{4}S$.

**396.** Радіус кулі дорівнює $R$. Через точку її поверхні проведено дві площини: одна — дотична до кулі, а друга — під кутом $30°$ до першої. Знайдіть площу перерізу кулі другою площиною.

**397.** Місто Харків розташоване на $50°$ північної широти (див. рис. 108, *б*). Вважаючи це місто матеріальною точкою, обчисліть шлях, який воно проходить протягом доби внаслідок обертання Землі навколо своєї осі ($R_З \approx 6000$ км).

**398.** Визначте географічну широту населеного пункту, де ви мешкаєте, й обчисліть шлях, який він проходить протягом години внаслідок обертання Землі навколо своєї осі ($R_З \approx 6000$ км).

**399.** До сфери з центром $O$ проведено дотичну площину $\alpha$. Через точку $A$ даної площини проведено пряму $AO$, яка перетинає дану сферу в точках $C$ і $D$. Знайдіть відстань від точки $A$ до точки дотику, якщо $AC = 1$ см, $AD = 49$ см.

**400.** Точка дотичної площини віддалена від точки дотику цієї площини зі сферою на 12 см. Знайдіть відстань від даної точки до центра сфери, якщо радіус сфери дорівнює 9 см.

**401.** Сфера дотикається до граней двогранного кута, який дорівнює $60°$. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від її центра до ребра кута дорівнює $a$.

**402.** Сфера дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть його градусну міру, якщо радіус сфери дорівнює 8 см, а відстань між точками дотику $8\sqrt{2}$ см.

**403.** Усі вершини плоского многокутника належать сфері з радіусом 25 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини многокутника, якщо даний многокутник є:

а) рівнобедреним трикутником з основою 24 см і кутом при основі $75°$;

б) рівнобічною трапецією з бічною стороною 18 см і діагоналлю 24 см, перпендикулярною до бічної сторони.

**404.** Усі сторони плоского многокутника дотикаються до сфери, центр якої віддалений від площини многокутника на 3 см. Знайдіть радіус сфери, якщо даний многокутник є:

а) трикутником зі сторонами 10 см, 35 см і 39 см;

б) рівнобічною трапецією з основами 4 см і 16 см.

## Рівень В

**405.** Радіус кулі дорівнює 18 см. Два взаємно перпендикулярні перерізи кулі, площі яких відносяться як $4:9$, мають спільну хорду завдовжки 2 см. Знайдіть радіуси цих перерізів.

**406.** У кулі проведено два паралельні перерізи, менший із яких має площу $81\pi$ см$^2$. Діаметр кулі, проведений через центри даних перерізів, ділиться ними у відношенні $2:7:1$. Знайдіть довжину діаметра.

**407 (опорна).** ***Лінією перетину двох сфер є коло. Центр цього кола належить прямій, яка проходить через центри даних сфер, а площина кола перпендикулярна до цієї прямої.*** Доведіть.

**408.** Радіуси двох сфер дорівнюють 10 см і 17 см, а відстань між їхніми центрами 21 см. Знайдіть довжину лінії перетину цих сфер.

**409.** Знайдіть геометричне місце:

а) центрів сфер, що проходять через дві дані точки;

б) центрів сфер із радіусом $R$, які дотикаються до даної площини;

в) центрів перерізів кулі з радіусом $R$, які мають площу $S$.

**410.** Знайдіть геометричне місце:

а) центрів сфер із радіусом $R$, що проходять через дану точку $A$;

б) центрів сфер, що дотикаються до даної площини $\alpha$ в даній на ній точці $A$;

в) середин усіх хорд даної кулі, паралельних даній прямій.

## Повторення перед вивченням § 10

### Теоретичний матеріал

- площа прямокутника; 8 клас, § 16
- площа круга; 9 клас, § 19
- призма; 11 клас, § 2
- циліндр. 11 клас, § 7

### Задачі

**411.** У правильній чотирикутній призмі площа основи дорівнює $S$, а висота — $h$. Знайдіть площу діагонального перерізу.

**412.** Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом. Діаметр циліндра дорівнює $d$, а висота — $h$. На якій відстані від осі циліндра проведено переріз?

# Тестове завдання для самоперевірки № 2

**1.** Серед заданих тіл виберіть те, яке не є тілом обертання.

**А** Куля
**Б** Циліндр
**В** Призма
**Г** Конус

**2.** Назвіть тіло, що утворюється внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо катета.

**А** Конус
**Б** Зрізаний конус
**В** Циліндр
**Г** Піраміда

**3.** Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. Переріз конуса, який відтинає від нього менший конус, проходить...

**А** через вершину конуса.
**Б** перпендикулярно до висоти конуса.
**В** через дві твірні конуса.
**Г** перпендикулярно до площини основи конуса.

**4.** Площа осьового перерізу рівностороннього циліндра дорівнює 36 см$^2$. Знайдіть площу основи циліндра.

**А** 9 см$^2$
**Б** $36\pi$ см$^2$
**В** $9\pi$ см$^2$
**Г** $6\pi$ см$^2$

**5.** Площа великого круга кулі дорівнює $16\pi$ см$^2$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини, дотичної до даної кулі.

**А** 4 см
**Б** 8 см
**В** 2 см
**Г** $4\pi$ см

**6.** Осьовий переріз конуса з радіусом основи $R$, висотою $H$ і твірною $l$ — рівнобедрений прямокутний трикутник. Серед наведених рівностей виберіть неправильну.

**А** $R=H$
**Б** $l=R\sqrt{2}$
**В** $H=\frac{\sqrt{2}}{2}l$
**Г** $l=2H$

**7.** Переріз, паралельний осі циліндра з радіусом $R$ і висотою $H$, має форму квадрата і відтинає від кола основи дугу $60°$. Серед наведених співвідношень виберіть правильне.

**А** $R<H$
**Б** $R=H$
**В** $R>H$
**Г** $R=2H$

**8.** На рис. 117 точки $A$ і $B$ належать сфері з центром $O$ і радіусом $R$, точка $O_1$ — центр зафарбованого перерізу сфери, $\angle OAO_1 = 30°$. Знайдіть довжину відрізка $O_1B$, якщо точка $O$ належить йому.

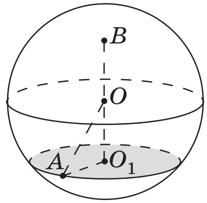



**Рис. 117**

**А** $0{,}5R$ **В** $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

**Б** $R$ **Г** $1{,}5R$

**9.** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють $R$ і $r$ ($R > r$), а твірна нахилена до площини більшої основи під кутом $\alpha$ ($\alpha \neq 45°$). Знайдіть висоту зрізаного конуса.

**А** $(R-r)\operatorname{tg}\alpha$ **В** $(R-r)\sin\alpha$

**Б** $(R-r)\operatorname{ctg}\alpha$ **Г** $(R-r)\cos\alpha$

**10.** Два паралельні перерізи кулі мають площі $9\pi$ см$^2$ і віддалені один від одного на 8 см. Знайдіть площу великого круга кулі.

**А** $9\pi$ см$^2$ **В** $25\pi$ см$^2$

**Б** $16\pi$ см$^2$ **Г** $36\pi$ см$^2$

**11.** Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи, площі яких дорівнюють $S$ і $Q$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**А** $\sqrt{SQ}$ **В** $S+Q$

**Б** $\sqrt{S^2+Q^2}$ **Г** $\frac{SQ}{S+Q}$

**12.** Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник із бічною стороною 6 см і кутом $120°$. Яку найбільшу площу може мати переріз конуса, проведений через його вершину?

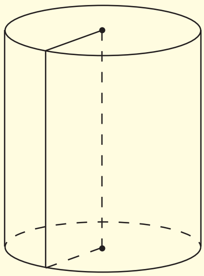
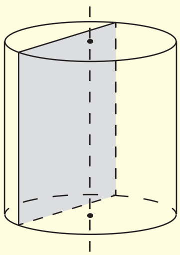
**А** $9\sqrt{3}$ см$^2$ **В** 9 см$^2$

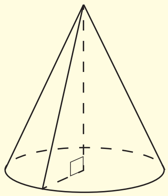
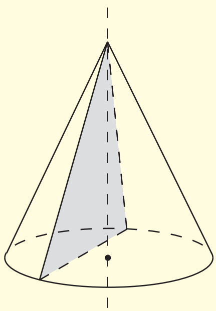
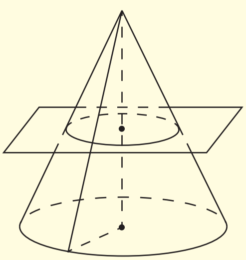
**Б** $18\sqrt{3}$ см$^2$ **Г** 18 см$^2$

## Онлайн-тестування № 2

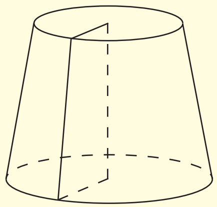
## Теми повідомлень, рефератів, навчальних проектів

# Підсумки розділу II

| ЦИЛІНДР | |
|---|---|
|  | ***Циліндром*** (точніше, ***круговим циліндром***) називається тіло, яке складається з двох кругів (***основ циліндра***), що не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів<br><br>***Прямим циліндром*** (далі — циліндром) називається циліндр, твірні якого перпендикулярні до площин основ<br><br>***Твірними циліндра*** називаються відрізки, що сполучають відповідні точки кіл, які обмежують основи<br><br>***Радіусом циліндра*** називається радіус його основи |
|  | ***Висотою циліндра*** називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи циліндра до площини іншої основи<br><br>***Віссю циліндра*** називається пряма, що проходить через центри основ<br>• Основи циліндра — рівні круги, що лежать у паралельних площинах<br>• Усі твірні циліндра паралельні й рівні<br>• Висота циліндра дорівнює його твірній<br>• Відрізок, який сполучає центри основ циліндра, дорівнює твірній, а отже, й висоті циліндра<br>• Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником |

| КОНУС | |
|---|---|
|  | ***Конусом*** (точніше, ***круговим конусом***) називається тіло, яке складається з круга (***основи конуса***), точки, що не належить площині цього круга (***вершини конуса***), і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи |
| <br> | ***Прямим конусом*** (далі — конусом) називається конус, у якого пряма, що проходить через вершину конуса і центр кола основи, перпендикулярна до площини основи<br>***Твірною конуса*** називається відрізок, що сполучає вершину конуса з точкою кола основи<br>***Висотою конуса*** називається перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи<br>***Віссю конуса*** називається пряма, яка містить висоту конуса<br>• Усі твірні конуса рівні й утворюють однакові кути з площиною основи<br>• Переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину, є рівнобедреним трикутником, бічні сторони якого — твірні даного конуса<br>• Площина, яка паралельна площині основи конуса і перетинає його твірні, відтинає менший конус, центр основи якого лежить на висоті заданого конуса, а твірні, висоти й радіуси основ меншого й заданого конусів є пропорційними відрізками. Площа перерізу конуса, паралельного площині основи, і площа основи відносяться як квадрати відстаней від вершини конуса до площин перерізу й основи |

## ЗРІЗАНИЙ КОНУС



Площина, яка паралельна площині основи конуса й перетинає його твірні, відтинає менший конус і тіло, яке називається ***зрізаним конусом***

***Основами зрізаного конуса*** є основа даного конуса і круг, отриманий у перерізі

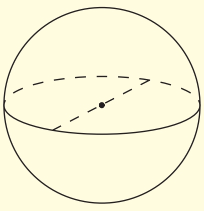
***Висотою зрізаного конуса*** називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи до площини іншої основи

***Твірними зрізаного конуса*** називаються відрізки твірних даного конуса, обмежені площинами основ зрізаного конуса

***Віссю зрізаного конуса*** називається пряма, яка проходить через центри його основ

- Усі твірні зрізаного конуса рівні й однаково нахилені до площини кожної з основ
- Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція, основами якої є діаметри основ зрізаного конуса, а бічними сторонами — його твірні

## КУЛЯ І СФЕРА

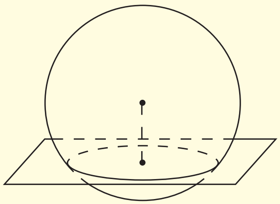


***Кулею*** називається множина всіх точок простору, віддалених від даної точки (***центра кулі***) на відстань, що не перевищує задану (***радіус кулі***)

***Сферою*** називається поверхня кулі

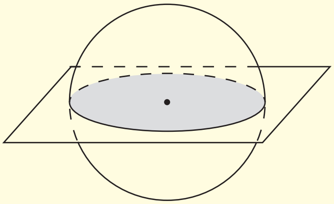
***Хордою сфери*** називається відрізок, що сполучає дві точки сфери

***Діаметром кулі (сфери)*** називається хорда, яка проходить через центр сфери



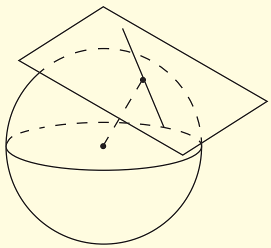
Якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то перерізом кулі даною площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до площини перерізу

Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло. Центр цього кола є основою перпендикуляра, проведеного з центра сфери до площини перерізу



***Діаметральною площиною*** називається січна площина, яка проходить через центр кулі

Переріз кулі діаметральною площиною називають ***великим кругом***, а коло цього перерізу — ***великим колом***



***Дотичною площиною до сфери (кулі)*** називається площина, яка має зі сферою єдину спільну точку (***точку дотику***)

***Властивість дотичної площини***

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику

***Ознака дотичної площини***

Якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, яка проходить через другий кінець радіуса, то дана площина є дотичною до сфери

***Дотичною прямою до сфери (кулі)*** називається пряма, яка належить дотичній до даної сфери (кулі) площині і проходить через точку дотику

## Контрольні запитання до розділу II

1. Дайте означення циліндра. Зобразіть циліндр і опишіть його елементи.
2. Якою фігурою є осьовий переріз циліндра; переріз, паралельний основам циліндра; переріз, паралельний осі циліндра? Доведіть відповідні твердження.
3. Дайте означення конуса. Зобразіть конус і опишіть його елементи.
4. Якою фігурою є переріз, що проходить через вершину конуса; осьовий переріз конуса; переріз, паралельний основі конуса? Доведіть відповідні твердження.
5. Зобразіть зрізаний конус і опишіть його елементи.
6. Дайте означення кулі і сфери. Якими фігурами є їхні перерізи? Доведіть відповідні твердження.
7. Дайте означення дотичної площини до сфери. Сформулюйте і доведіть властивість дотичної площини.

## Додаткові задачі до розділу II

**413.** Радіус циліндра дорівнює $R$. На якій відстані від осі циліндра проходить паралельний їй переріз, площа якого вдвічі менша, ніж площа осьового перерізу?

**414.** Циліндр із радіусом $R$ вміщений у шпарину завширшки $d$ ($d < 2R$) так, що його вісь паралельна краям шпарини (рис. 118). На яку глибину циліндр заглиблений у шпарину?

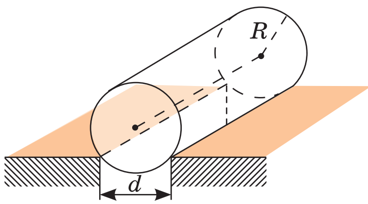



**Рис. 118**

**415.** Три твірні конуса завдовжки $l$ попарно утворюють кути $60°$. Знайдіть висоту і радіус основи конуса.

**416.** Осьовий переріз конуса рівновеликий квадрату, побудованому на радіусі основи як на стороні. Знайдіть кут нахилу твірної до площини основи конуса.

**417.** Периметр осьового перерізу конуса дорівнює 32 см, а висота 8 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середину висоти конуса паралельно площині основи.

**418.** Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $150°$, а площа цього перерізу дорівнює $Q$. Знайдіть площу найбільшого перерізу конуса, який проходить через його вершину.

**419.** Тіло обмежене двома сферами зі спільним центром. Доведіть, що площа перерізу тіла площиною, яка проходить через центри сфер, дорівнює площі його перерізу площиною, дотичною до меншої сфери.

**420.** Через точки $A$ і $B$, які ділять радіус кулі $OC$ на три рівні частини, проведено перерізи кулі, перпендикулярні до $OC$. Знайдіть відношення площ цих перерізів.

**421.** Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту потрібно піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

**422.** Заповніть водою до половини склянку циліндричної форми та трохи нахиліть її. Наведіть фломастером на зовнішній поверхні склянки лінію, по якій поверхня води торкається стінки склянки. Якою фігурою є отримана крива? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію щодо проведеного експерименту й підтвердьте або спростуйте ваше припущення.

**423.** На рис. 119 зображено поперечний переріз аркового проїзду, верхня частина якого (дуга $BKC$) має форму півкола радіуса $OC = 2$ м; $AB \perp AD$, $DC \perp AD$, $AB = DC = 2$ м. Визначте найбільшу висоту $h$ вантажівки, за якої вона може проїхати через цей арковий проїзд, не торкаючись верхньої частини арки. Вважайте, що чотирикутник $LMNP$ — прямокутник, у якому $MN = 2{,}4$ м, $MN \parallel AD$. Відповідь округліть до десятих метра.

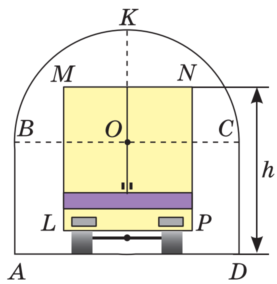


**Рис. 119**

**424.** Які тіла обертання, на вашу думку, найчастіше використовуються в архітектурі? Наведіть приклади відповідних будівель. Знайдіть їх зображення у мережі Інтернет. Які відомі будівлі в Україні, у яких застосовуються тіла обертання як архітектурні елементи, ви знаєте?

## Задачі підвищеної складності

**425.** Дано конус із висотою $PO$ і рівносторонній циліндр із центрами основ $P$ і $O$. У якому відношенні твірна конуса ділить твірну циліндра, якщо кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $120°$?

**426.** Кінці відрізка завдовжки $\sqrt{41}$ см належать колам основ циліндра, радіус якого дорівнює 2 см. Якою має бути висота циліндра, щоб даний відрізок перетинав його вісь?

**427.** Два правильні трикутники не лежать в одній площині і мають спільну сторону. Доведіть, що всі їхні вершини лежать на одній сфері. Чи існує сфера, яка дотикається до всіх сторін даних трикутників?

**428.** Сфера з радіусом $R$ проходить через усі вершини однієї грані куба і дотикається до протилежної грані. Знайдіть ребро куба.

**429.** Доведіть, що всі спільні точки циліндра (конуса) та площини, дотичної до нього, містяться на твірній циліндра (конуса), яка є їхнім спільним відрізком.

## Харківський національний університет

Харківський національний університет (ХНУ) імені В. Н. Каразіна був створений у 1804 р. З університетом пов'язані імена трьох лауреатів Нобелівської премії. Це І. Мечников (біологія), С. Кузнець (економіка) та Л. Ландау (фізика).

Майже одночасно з університетом було засновано університетський ботанічний сад і створено центральну наукову бібліотеку, яка зараз налічує майже 3,5 млн. примірників. Університетський музей природи є одним із найстаріших у світі музеїв, відкритих при вищих навчальних закладах.

Цікаво, що в університеті навчався, а згодом став професором та ректором відомий український поет-байкар П. Гулак-Артемовський. У 1906 р. звання почесного доктора Харківського університету було присуджено відомому історику М. Грушевському і видатному письменнику та поету І. Франку.

Одним із найбільш вагомих за науковим внеском факультетів ХНУ є факультет математики та інформатики, відомий в Україні та далеко за її межами. Серед колишніх студентів і викладачів цього факультету — вчені, що працювали в різних галузях математики й отримали міжнародне визнання: М. Остроградський, О. Ляпунов, В. Стеклов, С. Бернштейн, Н. Ахієзер та багато інших. Вже у наші часи, наприкінці XX — на початку XXI ст., з факультетом були пов'язані імена всесвітньо відомих академіків В. Марченка, Л. Пастура, О. Погорєлова.

На факультеті велика увага приділяється олімпіадному математичному руху. Так, О. Погорєлов був одним із перших переможців українських учнівських матема-

*Петро Петрович Гулак-Артемовський*

*Центральний корпус ХНУ ім. В. Н. Каразіна* тичних олімпіад, В. Марченко став золотим призером 8-ї Міжнародної математичної олімпіади. В. Дрінфельд, який навчався та певний час працював у Харкові, в 15 років став абсолютним переможцем Міжнародної учнівської олімпіади з математики, а у 1990 р. отримав (єдиний в Україні!) медаль Філдса — найпрестижнішу в світі відзнаку з математики для молодих учених.

На факультеті існує багаторічна традиція — поєднувати ґрунтовні наукові дослідження із захопленнями студентів математичним світом. Лекції та цікаві історії таких видатних особистостей, як професори Г. Дрінфельд, Ю. Гандель, В. Борок, на все життя запам'ятались багатьом поколінням випускників та визначили їхню подальшу роботу в руслі математики та її викладання.

*Професор Валентина Михайлівна Борок*

*Пам'ятна монета на честь 200-річчя Харківського університету*

*Модель геометричного тіла, що зберігається на факультеті математики та інформатики ХНУ ім. В. Н. Каразіна*

Останніми роками серед абітурієнтів факультету є численні переможці різних математичних змагань школярів — олімпіад, турнірів, конкурсів Малої академії наук. Вони продовжують виборювати призові місця найвищого рівня вже на студентських математичних олімпіадах.

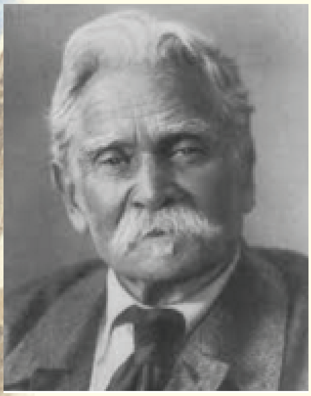
Звичайно, серед провідних напрямків наукових досліджень на факультеті важливе місце займає сучасна геометрія. Це і теоретична наука, і джерело математичних ідей для практичного втілення математики в сучасні технології.

## Історична довідка

*В. Ф. Каган*

Поняття тіла обертання було відоме ще з догрецьких часів. Означення циліндра, конуса й кулі наведені в «Началах» Евкліда, але чимала заслуга в дослідженні цих тіл належить його сучасникам і послідовникам — Евдоксу, Аполлонію, Архімеду, Паппу. Зокрема, Аполлоній Пергський (бл. 262–190 рр. до н. е) у своїй відомій праці «Конічні перерізи» установив, що перерізами конічної поверхні можуть бути коло, еліпс, парабола або гіпербола.

Новим поштовхом для вивчення поверхонь і тіл обертання стало виникнення й розвиток диференціальної геометрії, яка дала змогу досліджувати плоскі й просторові криві та поверхні методами математичного аналізу. Її виникнення було, у свою чергу, обумовлене практичними потребами математичної картографії, зокрема необхідністю повністю або частково зображати земну поверхню на площині.



*Б. Я. Букреєв*

В історію розвитку диференціальної геометрії вписано й імена учених, чия наукова діяльність пов’язана з Україною. Визначний математик і педагог, автор «Нарисів із теорії поверхонь» Веніамін Федорович Каган (1869–1953), який екстерном закінчив Київський університет, на початку XX століття вів плідну наукову та просвітницьку діяльність в Одесі. Професор Київського університету Борис Якович Букреєв (1859–1962), автор праці «Елементи теорії поверхонь», був одним із засновників Київського математичного товариства, яке було й залишається осередком передових наукових ідей.

# Розділ III

# ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ


> Те, чим у попередні епохи займалися лише зрілі уми вчених мужів, у більш пізні часи стало доступним для усвідомлених юнаків.
>
> *Георг Вільгельм Фрідріх Гегель, німецький філософ*

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

З давніх часів люди застосовували геометрію для вирішення конкретних життєвих проблем — знаходження об'ємів посудин, будівель та кораблів, кількості фарби, необхідної для оздоблення приміщень. На підставі практичного досвіду з'явилися методи обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь. Але відкриття відповідних формул, а тим більше їх доведень зайняло багато сторінок в історії геометричної науки. Чимало великих учених зробили свій внесок у розвиток відповідної теорії, а популяризаторів математики — у спрощення й доступне викладання цих міркувань.

Основною метою даного розділу є формування уявлення про об'єми та площі поверхонь, обґрунтування відповідних формул для основних просторових фігур. Ви навчитеся різних методів знаходження об'ємів, як суто геометричних, так і тих, що поєднують в собі геометрію та початки аналізу. При вивченні об'ємів тіл доречно буде пригадати та систематизувати матеріал щодо площ фігур на площині. Підходи, які застосовувалися для отримання найважливіших формул площ, будуть надійним підґрунтям для побудови теорії об'ємів.

У даному розділі йтиметься про всі найголовніші фігури, які ви вивчали протягом року, зокрема про тісний зв'язок многогранників і тіл обертання. Це дасть вам змогу як пригадати основні факти з курсу геометрії, так і на підставі формул для площ поверхонь многогранників отримати відповідні результати для тіл обертання.

Задачі розділу містять багато геометричних конфігурацій, що дозволить вам переосмислити весь курс стереометрії з точки зору застосування своїх знань на практиці, а саме для знаходження чи не найбільш поширених у житті геометричних величин — об'ємів і площ поверхонь. Заради цього неоціненного досвіду ви й вивчали, врешті-решт, геометрію в просторі.

# § 10 Об'єми многогранників. Об'єм паралелепіпеда, призми та циліндра

## 10.1. Поняття про об'єм многогранника

Поняття об'єму добре відоме на рівні повсякденного досвіду: ми купуємо пакет соку певного об'єму, розраховуємо, який об'єм займуть у квартирі нові меблі, беремо для приготування страви каструлю відповідного об'єму. Надамо цим наглядним уявленням про об'єм тіла певну математичну строгість.

Для подальших міркувань корисно буде поєднати практичний досвід та відому вже теорію щодо площ многокутників. За аналогією з нею ми й будуватимемо теорію об'ємів просторових тіл, перш за все многогранників.

Об'єм характеризує величину частини простору, яку займає геометричне тіло, і вимірюється, як і площа, у певних одиницях. За одиницю вимірювання площ беруть площу одиничного квадрата, а за одиницю об'єму візьмемо об'єм одиничного куба, тобто куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини. Якщо за одиницю вимірювання довжини прийнято 1 мм, 1 см, 1 дм або 1 м, то за одиницю вимірювання об'єму приймають об'єм куба з ребром 1 мм, 1 см, 1 дм або 1 м. Відповідна одиниця об'єму називається кубічним міліметром (1 мм$^3$), кубічним сантиметром (1 см$^3$), кубічним дециметром, або літром (1 дм$^3$, або 1 л), кубічним метром (1 м$^3$). Отже, знаходження об'ємів тіл різної форми базується на порівнянні з об'ємом одиничного куба.

Виміряти об'єм тіла на практиці можна, зокрема, зануривши його у воду й підрахувавши кількість води, яку тіло витіснить. Але в багатьох випадках це недоречно, тому дуже корисно вивести й навчитись застосовувати формули для об'ємів. Відповідна теорія ґрунтується на аксіомах об'єму многогранників.

**1. Рівні многогранники мають рівні об'єми.**

**2. Якщо многогранник складений із кількох многогранників, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих многогранників.**

**3. Об'єм куба з ребром, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці об'єму.**

Отже, ***об'єм многогранника*** — це додатна величина, числове значення якої задовольняє аксіоми об'єму.

Зазвичай об'єм позначається літерою $V$.

У наведених аксіом є, зокрема, практичне підґрунтя. Дійсно, усі пакети, які мають форму прямокутного паралелепіпеда й однакові розміри, містять однакову кількість соку. Узагалі, тіла з однаковим об'ємом називаються ***рівновеликими***. Якщо ж кожний із двох пакетів можна розлити в однакову кількість маленьких пакетиків, то сума об'ємів цих пакетиків дорівнюватиме об'єму кожного з пакетів, тобто дані пакети містять однаковий об'єм.

Тіла, які складені з одних і тих самих многогранників, називаються ***рівноскладеними***. Наприклад, рівноскладеними є тіла, зображені на рис. 120, *а*, *б*: пряма трикутна призма й прямий паралелепіпед. Дійсно, кожна з цих фігур складається з двох однакових прямих призм, таких як на рис. 120, *в*.

Очевидно, що будь-які рівноскладені многогранники мають рівні об'єми за другою аксіомою. Цікаво, що обернене твердження не є правильним (на відміну від аналогічної теореми для площ). Так, многогранники рівного об'єму не завжди можливо розрізати на скінченну кількість відповідно однакових многогранників. Зокрема, куб та правильний тетраедр однакових об'ємів (рис. 120, *г*) не є рівноскладеними.

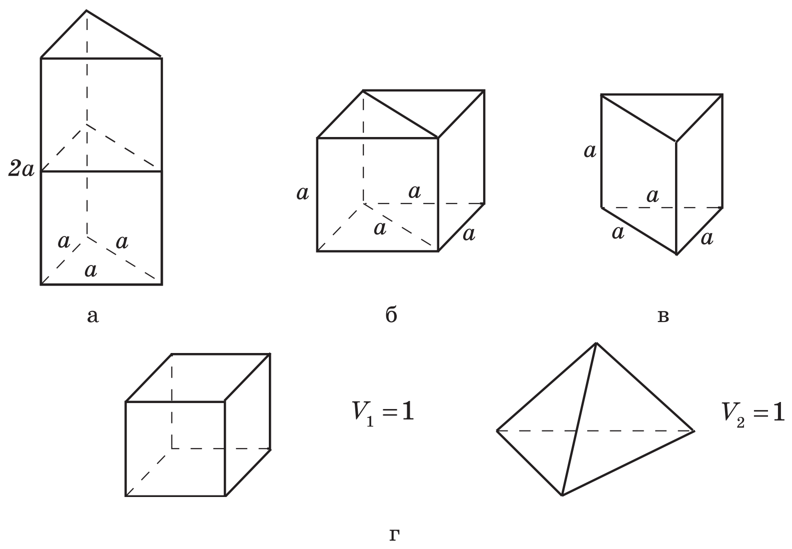



**Рис. 120.** Приклади рівноскладених і нерівноскладених тіл

## 10.2. Об'єм паралелепіпеда

Найпростішою фігурою з точки зору обчислення об'єму є прямокутний паралелепіпед.

### Теорема (формула об'єму прямокутного паралелепіпеда)

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів:

$$V = abc,$$

де $a$, $b$, $c$ — виміри прямокутного паралелепіпеда.

Доведення

☐ Доведемо спочатку, що об'єми двох прямокутних паралелепіпедів із рівними основами відносяться як довжини їхніх висот.

Нехай $P_1$ і $P_2$ — два прямокутні паралелепіпеди з рівними основами та об'ємами $V_1$ і $V_2$ відповідно. Розмістимо дані паралелепіпеди, сумістивши їхні основи, та розглянемо об'єми паралелепіпедів $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і $ABCDA_2B_2C_2D_2$ (рис. 121).

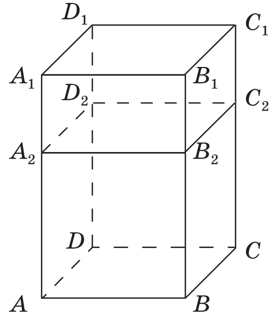



**Рис. 121.** Суміщення основ паралелепіпедів

Нехай, для визначеності, $AA_2 < AA_1$. Розіб'ємо ребро $AA_1$ на $n$ рівних відрізків. Нехай на відрізку $AA_2$ лежить $m$ точок поділу. Тоді:

$$\left(\frac{AA_1}{n}\right)\cdot m \leqslant AA_2 \leqslant \left(\frac{AA_1}{n}\right)\cdot(m+1), \text{ тобто}$$

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AA_2}{AA_1} \leqslant \frac{m+1}{n},$$

або

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AA_2}{AA_1} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Тепер проведемо через точки поділу площини, паралельні основі $ABCD$ (рис. 122). Вони розіб'ють паралелепіпед $P_1$ на $n$ рівних паралелепіпедів. Кожний із них має об'єм $\frac{V_1}{n}$. Очевидно, що паралелепіпед $P_2$ містить об'єднання $m$ паралелепіпедів та сам міститься в об'єднанні $(m+1)$ паралелепіпедів.

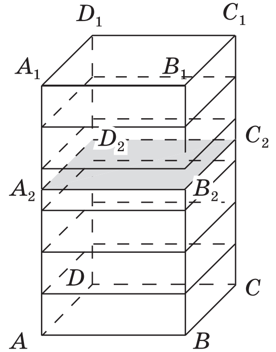



**Рис. 122.** Розбиття на рівні паралелепіпеди

Отже, $m\cdot\frac{V_1}{n}\leqslant V_2\leqslant(m+1)\cdot\frac{V_1}{n}$, звідки $\frac{m}{n}\leqslant\frac{V_2}{V_1}\leqslant\frac{m+1}{n}$, або

$$\frac{m}{n}\leqslant\frac{V_2}{V_1}\leqslant\frac{m}{n}+\frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), бачимо, що обидва відношення $\frac{AA_2}{AA_1}$ і $\frac{V_2}{V_1}$ містяться між $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$, тобто відрізняються не більше ніж на $\frac{1}{n}$ ($n$ — натуральне число). Доведемо методом від супротивного, що ці відношення рівні.

Припустимо, що це не так, тобто $\left|\frac{V_2}{V_1}-\frac{AA_2}{AA_1}\right|=\delta>0$. Тоді знайдеться таке натуральне число* $n$, що $\frac{1}{n}<\delta$. Звідси $\delta=\left|\frac{V_2}{V_1}-\frac{AA_2}{AA_1}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta$. З отриманої суперечності випливає, що $\frac{V_2}{V_1}=\frac{AA_2}{AA_1}$, тобто об'єми двох прямокутних паралелепіпедів із рівними основами відносяться як довжини їхніх висот.

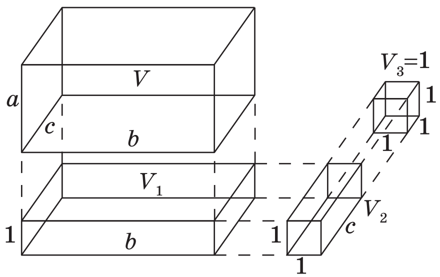



**Рис. 123.** Порівняння об'єму паралелепіпеда з об'ємом одиничного куба

Розглянемо тепер прямокутні паралелепіпеди з вимірами $a$, $b$, $c$; 1, $b$, $c$; 1, 1, $c$ та 1, 1, 1, об'єми яких дорівнюють $V$, $V_1$, $V_2$, $V_3$ відповідно (рис. 123).

За аксіомою об'єму $V_3=1$. За доведеним $\frac{V}{V_1}=\frac{a}{1}$, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{b}{1}$, $\frac{V_2}{V_3}=\frac{c}{1}$. Перемноживши отримані відношення, маємо: $V=abc$.

Теорему доведено. ■

## Наслідок (формула об'єму куба)

Об'єм куба дорівнює кубу його ребра:

$$V=a^3,$$

де $a$ — ребро куба.

* Оберемо $n>\frac{1}{\delta}$, наприклад, $n=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$, де $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ — ціла частина дробу $\frac{1}{\delta}$.

Нам відомо, що площа прямокутника дорівнює добутку двох його вимірів, а паралелограма — добутку його сторони на проведену до неї висоту. За аналогією неважко припустити, що об'єм довільного паралелепіпеда також можна знайти за площею основи та відповідною висотою.

### Теорема (формула об'єму паралелепіпеда)

Об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи паралелепіпеда, $h$ — висота.

Доведення

□ Очевидно, що для прямокутного паралелепіпеда дана формула справджується. Доведемо її для похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 124). Проведемо через ребра $BC$ та $AD$ площини, перпендикулярні до основи $ABCD$. Доповнимо похилий паралелепіпед трикутною призмою $BB_1B_2CC_1C_2$ та відітнемо трикутну призму $AA_1A_2DD_1D_2$. Ці призми є рівними, оскільки суміщаються паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{AB}$. Отже, отриманий паралелепіпед має той самий об'єм, що й початковий. При такому перетворенні паралелепіпеда площа його основи й висота не змінилися, а дві бічні грані стали перпендикулярними до площини основи $ABC$. Якщо виконати аналогічне перетворення за допомогою площин, що проходять через $AB$ та $DC$ перпендикулярно до основи $ABCD$, отримаємо прямий паралелепіпед з основою $ABCD$, рівновеликий із початковим. При цьому висоти цих паралелепіпедів також є рівними.

Насамкінець проведемо через точки $A$ та $B$ площини, перпендикулярні до $AB$ (рис. 125). Доповнюючи прямий паралелепіпед однією трикутною призмою (1) та відтинаючи рівну їй другу призму (2), отримуємо прямокутний паралелепіпед, рівновеликий із попереднім.

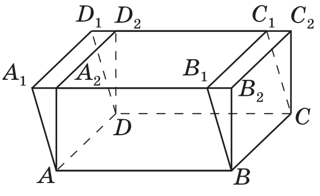



**Рис. 124.** До доведення формули об'єму паралелепіпеда

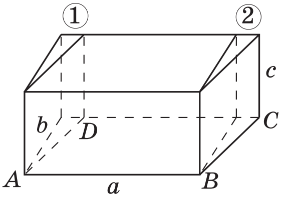



**Рис. 125.** Об'єми прямого і прямокутного паралелепіпедів

Об'єм утвореного прямокутного паралелепіпеда дорівнює $abc$. Оскільки при описаних вище перетвореннях даного паралелепіпеда в прямокутний щоразу утворюється паралелепіпед, рівновеликий з попереднім, а площа основи і висота не змінюються, то й об'єм початкового паралелепіпеда можна обчислити за отриманою формулою. Отже, отримуємо формулу об'єму похилого паралелепіпеда: $V = abc = S_{ABCD} \cdot h$.

Таким чином, об'єм довільного паралелепіпеда обчислюється за формулою $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Теорему доведено. ■

### Задача

В основі похилого паралелепіпеда лежить прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм даного паралелепіпеда, якщо дві його бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30°.

### Розв'язання

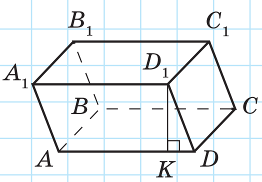



**Рис. 126**

Нехай дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 126), в основі якого лежить прямокутник $ABCD$ зі сторонами 3 см і 4 см. Бічні ребра паралелепіпеда рівні і мають довжини 6 см. Протилежні бічні грані паралелепіпеда паралельні, отже, рівнонахилені до площини його основи. Нехай грані $AA_1D_1D$ та $BB_1C_1C$ перпендикулярні до грані $ABCD$, а грані $AA_1B_1B$ та $DD_1C_1C$ утворюють з $ABCD$ кут 30°. Проведемо в площині $(AA_1D_1)$ перпендикуляр $D_1K$ до $AD$. За властивістю перпендикулярних площин $D_1K \perp (ABC)$, отже, $D_1K$ — висота даного паралелепіпеда. Оскільки $D_1K$ є перпендикуляром, $D_1D$ — похилою, $KD$ — її проекцією на площину $ABC$, причому $KD \perp CD$, то за теоремою про три перпендикуляри $D_1D \perp CD$. Отже, кут $\angle D_1DK$ дорівнює куту між площинами $(DD_1C_1)$ та $ABC$. За умовою $\angle D_1DK = 30°$. Із прямокутного трикутника $D_1KD$ отримуємо: $D_1K = D_1D \cdot \sin 30° = 3$ см. Таким чином,

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{\text{осн}} \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 36 см$^3$.

## 10.3. Об'єм призми

На площині для виведення формули площі трикутника було зручно застосувати доповнення трикутника до паралелограма. Далі, для отримання формули площ інших многокутників, доречно було розбити їх на трикутники. Застосуємо аналогічні прийоми для виведення формули об'єму призми.

### Теорема (формула об'єму призми)

Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми, $h$ — її висота.

Доведення

□ Нехай дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Доповнимо її до паралелепіпеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$, як показано на рис. 127. Добудована призма симетрична даній відносно центра симетрії паралелепіпеда точки $O$. Отже, вона дорівнює даній призмі. Тоді, за аксіомами об'єму, паралелепіпед має вдвічі більший об'єм, ніж дана призма.

Але $V_{ABDCA_1B_1D_1C_1} = S_{ABDC} \cdot h = 2 \cdot S_{ABC} \cdot h$, отже, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot h$.

Застосуємо щойно виведену формулу об'єму трикутної призми до розгляду довільної призми.

Розіб'ємо основу призми на трикутники, а призму — на відповідні трикутні призми з висотою $h$ (рис. 128).

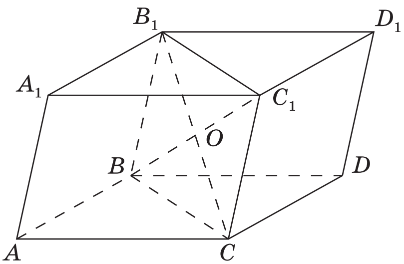



**Рис. 127.** До доведення формули об'єму трикутної призми

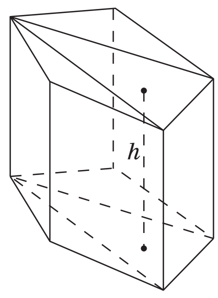



**Рис. 128.** До доведення формули об'єму призми

За аксіомою, об'єм даної призми дорівнює сумі об'ємів побудованих трикутних призм:

$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + \ldots + S_n \cdot h = \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) \cdot h = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

де $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ — площі трикутників, на які розбито основу призми.

Теорему доведено. ■

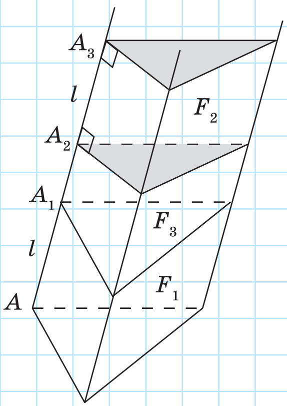



**Рис. 129.** До знаходження об'єму похилої призми

### Опорна задача

Об'єм похилої призми дорівнює добутку бічного ребра на площу перпендикулярного до нього перерізу: $V = S_{\perp} \cdot l$, де $l$ — бічне ребро призми, $S_{\perp}$ — площа перпендикулярного до нього перерізу.

Доведіть.

### Розв'язання

Розглянемо похилу призму $F_1$ з ребром $AA_1 = l$ (рис. 129). Проведемо два її перпендикулярні перерізи, відстань між площинами яких дорівнює $l$ і які розташовані по один бік від призми. При цьому утворяться пряма призма $F_2$ та многогранник $F_3$. Многогранник, який складається з $F_1$ і $F_3$, та многогранник, який складається з $F_3$ і $F_2$, є рівними, оскільки суміщаються паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Тому їхні об'єми є рівними. Ці многогранники мають спільну частину $F_3$. Звідси, за аксіомою об'єму, випливає, що об'єми призм $F_1$ і $F_2$ також є рівними. Але остання призма є прямою, і її об'єм дорівнює $S_{\perp} \cdot l$. Отже, об'єм даної призми дорівнює $V = S_{\perp} \cdot l$.

## 10.4. Об'єм циліндра. Комбінація циліндра та прямої призми

При обґрунтуванні формули площі круга в планіметрії ми застосовували вписані в коло та описані навколо нього многокутники. Застосуємо аналогічні міркування й у просторі, замінивши круг на циліндр, а многокутники — на призми. Дамо спочатку відповідні означення.

### Означення

Пряма призма називається **вписаною в циліндр**, якщо її основи вписані в основи циліндра.

При цьому циліндр називається описаним навколо призми. Очевидно, що бічні ребра призми є твірними циліндра, а висоти прямої призми й описаного навколо неї циліндра є рівними (рис. 130).

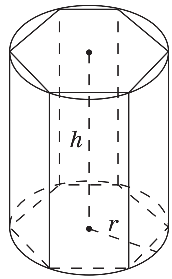



**Рис. 130.** Призма, вписана в циліндр

### Означення

Пряма призма називається **описаною навколо циліндра**, якщо її основи описані навколо основ циліндра.

При цьому циліндр називається вписаним у призму (рис. 131). Очевидно, що висоти прямої призми й вписаного в неї циліндра є рівними.

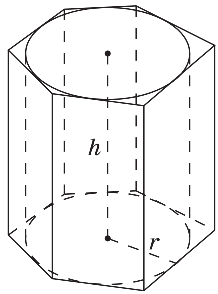



**Рис. 131.** Призма, описана навколо циліндра

### Теорема (формула об'єму циліндра)

*Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:*

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}_{\text{осн}} \cdot \boldsymbol{h} = \pi \boldsymbol{R}^2 \boldsymbol{h},$$

де $\boldsymbol{S}_{\text{осн}}$ — площа основи циліндра, $\boldsymbol{h}$ — висота, $\boldsymbol{R}$ — радіус циліндра.

Доведення

□ Впишемо в даний циліндр із радіусом $R$ та висотою $h$ правильну $n$-кутну призму з площею основи $S'_n$ та опишемо навколо нього правильну $n$-кутну призму з площею основи $S''_n$ (рис. 132). Тоді, за доведеним під час обґрунтування формули для площі круга, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = \pi R^2$.

Звідси випливає, що при необмеженому збільшенні $n$ об'єми вписаних призм $S'_n \cdot h$ і об'єми описаних призм $S''_n \cdot h$ прямують до величини $\pi R^2 h$. Отже, існують призми, що містяться

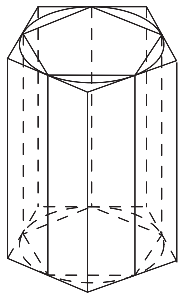


**Рис. 132.** До доведення формули об'єму циліндра

в даному циліндрі, та призми, що його містять, з об'ємами, що як завгодно мало відрізняються від $\pi R^2 h$. Тому об'єм циліндра виражається формулою $V = \pi R^2 h$.

Теорему доведено. ■

Прямі призми, вписані в циліндр або описані навколо нього, разом із циліндром утворюють ***комбінацію геометричних тіл***. Розглянемо приклад задачі на дану комбінацію.

## Задача

Основа прямої призми — трикутник зі стороною $c$ та прилеглими до неї кутами $\alpha$ і $\beta$. Діагональ грані, що містить сторону $c$, утворює з площиною основи призми кут $\varphi$. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.

## Розв'язання

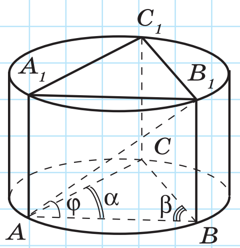



**Рис. 133**

Нехай дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, в основі якої лежить трикутник $ABC$ ($AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$). Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, то $AB_1$ — похила, $AB$ — її проекція на площину $ABC$. Отже, за означенням кут $B_1AB$ дорівнює куту між $AB$ та площиною $ABC$. За умовою $\angle B_1AB = \varphi$ (рис. 133).

Розглянемо циліндр, описаний навколо даної призми. Його основи описані навколо основ призми, висота дорівнює висоті призми.

За теоремою синусів для трикутника $ABC$ маємо:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{c}{2\sin\left(180^\circ - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Із прямокутного трикутника $ABB_1$:

$$BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg}\angle B_1AB = c \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Отже, об'єм циліндра дорівнює

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 \cdot (c \cdot \operatorname{tg}\varphi) = \frac{\pi c^3 \operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi c^3 \operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2(\alpha+\beta)}$.

# Запитання і задачі

## Обговорюємо теорію

**430.** Якої висоти (у метрах) буде стовпчик, якщо кубічний метр розрізати на кубічні сантиметри і поставити їх один на одний?

**431.** Чи зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда з квадратом в основі, якщо сторону квадрата зменшити у 2 рази, а висоту збільшити в 4 рази? Якщо так, то збільшиться чи зменшиться об'єм і в скільки разів?

**432.** Чи зміниться об'єм циліндра, якщо його радіус збільшити у 2 рази, а висоту зменшити у 2 рази. Якщо так, то збільшиться чи зменшиться об'єм і в скільки разів?

**433.** Свинцевий циліндр із висотою 1 дм переплавили в циліндр із радіусом, у 2 рази меншим. Якою стане висота циліндра?

**434.** Доведіть, що з усіх призм зі спільною основою і бічними ребрами однакової довжини найбільший об'єм має пряма призма.

## Моделюємо

**435.** Зліпіть із пластиліну куб, правильну трикутну призму і циліндр з однаковими висотами й об'ємами. Виміряйте, яка з основ має найбільшу площу і яка найменшу.

**436.** Зробіть із цупкого паперу правильні трикутну і чотирикутну призми, усі ребра яких однакові. Проведіть відповідні виміри і знайдіть відношення об'ємів цих призм.

## Розв'язуємо задачі

### Рівень А

**437.°** Знайдіть об'єм куба, якщо:

а) його ребро дорівнює 6 см;

б) його діагональ дорівнює $5\sqrt{3}$ дм;

в) площа його грані дорівнює 49 см$^2$.

**438.** Ємність для льоду має форму кубика. Знайдіть об'єм ємності, якщо лід, заморожений у ній, має масу 1,834 г, а густина льоду дорівнює 917 кг/м$^3$.

**439.**° Знайдіть об’єм куба, якщо:
а) його ребро дорівнює 0,2 м;
б) діагональ його грані дорівнює $3\sqrt{2}$ дм.

**440.**° Знайдіть об’єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
а) його виміри дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см;
б) його довжина дорівнює 32 см, ширина 24 см, а діагональ 41 см;
в) сторони його основи дорівнюють $a$ і $b$, а діагональ нахилена до основи під кутом $\alpha$.

**441.** Бак, що має форму прямокутного паралелепіпеда, наполовину заповнено бензином. Внутрішні розміри бака: довжина 3 м, ширина 1,5 м, висота 1,2 м. Густина бензину 710 кг/м$^3$. На скільки робочих днів вистачить у баці бензину для заправки автомобіля, якщо середні витрати бензину протягом робочого дня становлять 95 кг?

**442.** Будівельна бригада споруджує стінку з цегли на складі для зберігання мінеральних добрив. Довжина стінки 16 м, висота 4 м, товщина 15 см. За рахунок застосування будівельного розчину об’єм споруди збільшується на 12 %. Розміри цеглини 25 см × 12 см × 6,5 см. Скільки цеглин потрібно для виконання роботи, якщо вважати, що жодна цеглина не розбилася?

**443.** Стальний прямокутний паралелепіпед із вимірами 45 дм, 12 дм і 50 дм переплавили в куб. Знайдіть довжину ребра куба.

**444.**° Знайдіть об’єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
а) його виміри дорівнюють 3,2 см, 4 см і 0,5 см;
б) його довжина дорівнює 16 м, ширина 12 м, а діагональ грані 13 м;
в) сторони його основи дорівнюють 12 см і 16 см, а діагональ нахилена до основи під кутом 30°.

**445.**° Знайдіть об’єм прямого паралелепіпеда, якщо:
а) його основою є паралелограм, сторони якого дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 7 см, гострий кут 45°, а площа меншого діагонального перерізу 20 см$^2$;
б) його основою є ромб зі стороною $a$ і кутом $\alpha$, а площа бічної грані дорівнює $S$.

**446.** Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда з ромбом в основі, гострий кут якого дорівнює $30°$, а площа основи дорівнює площі бічної грані і становить 18 см$^2$.

**447.** Запишіть формулу об'єму правильної $n$-кутної призми зі стороною $a$ і бічним ребром $H$ для $n = 3, 4, 6$.

**448.** Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а периметр бічної грані — 18 см. Знайдіть об'єм призми.

**449.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 81 см$^2$, а площа бічної грані — 36 см$^2$. Знайдіть об'єм призми.

**450.°** Знайдіть об'єм прямої трикутної призми, якщо:
а) її висота дорівнює 6 см, а основою є прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 15 см, а гіпотенуза — 17 см;
б) ребра її основи дорівнюють 5 см, 5 см і 8 см, а діагональ більшої бічної грані 10 см;
в) її бічне ребро дорівнює 3 см, два ребра основи дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними $60°$.

**451.** Об'єм прямої трикутної призми дорівнює 120 см$^3$, а ребра основи — 4 см, 13 см, 15 см. Знайдіть бічне ребро призми.

**452.** Знайдіть об'єм прямої чотирикутної призми з бічним ребром 5 см і трапецією в основі, діагоналі якої взаємно перпендикулярні і дорівнюють 4 см і 7 см.

**453.** В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з висотою 4 см і бічною стороною 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ найбільшої бічної грані дорівнює 10 см.

**454.°** Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
а) радіус його основи дорівнює 5 см, висота 3 см;
б) його осьовим перерізом є квадрат зі стороною 4 см;
в) площа його основи дорівнює $9\pi$ см$^2$, висота дорівнює діаметру.

**455.°** Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
а) діаметр його основи дорівнює 8 см, висота 5 см;
б) площа його осьового перерізу дорівнює 60 дм$^2$, площа основи $25\pi$ дм$^2$.

**456.** Діаметр основи циліндра дорівнює $d$, а об'єм — $V$. Знайдіть площу осьового перерізу.

**457.** Скільки повних порцій супу міститься в каструлі, що має форму циліндра заввишки 50 см, діаметром 0,25 м, якщо вважати, що одна порція супу становить 0,25 л?

**458.** Діаметр каструлі, що має форму циліндра, дорівнює 54 см, висота 23 см. Скільки літрів води вміщує ця каструля?

**459.** Скільки кілограмів меду можна вмістити в посудину циліндричної форми з діаметром дна 32 см і висотою 26 см, якщо густина меду становить 1350 кг/м$^3$?

**460.** Чи поміститься 193 т бетону в циліндричній цистерні, діаметр якої дорівнює 6 м, а висота — 3 м, якщо густина бетону дорівнює 2300 кг/м$^3$?

**461.** Кут між діагоналями осьового перерізу циліндра дорівнює $\varphi$, а його діагональ — $d$. Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

## Рівень Б

**462.** Скільки дощок розмірами 5 м $\times$ 0,15 м $\times$ 0,04 м укладено в штабель масою 343,2 кг, якщо густина деревини 0,52 г/см$^3$?

**463.** Поле прямокутної форми площею 5 га було зорано на глибину 35 см. Який об'єм землі було перевернуто?

**464.** Знайдіть об'єм куба з діагоналлю $d$.

**465.** Знайдіть об'єм куба з площею грані $Q$.

**466.** Якщо кожне ребро куба збільшити на 3 см, то його об'єм збільшиться на 117 см$^3$. Знайдіть ребро куба.

**467.** Якщо кожне ребро куба зменшити на 2 см, то його об'єм зменшиться на 98 см$^3$. Знайдіть ребро куба.

**468.** Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагоналі граней якого дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см.

**469.** Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює 70 см, а його виміри відносяться як $3:2:6$.

**470.** Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 8 см, а одна з діагоналей основи — 7 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його менша діагональ дорівнює 25 см.

**471.** В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб із площею $S$. Площі діагональних перерізів дорівнюють $S_1$ і $S_2$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**472.** Висота прямого паралелепіпеда з ромбом в основі дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а діагоналі нахилені до основи під кутами 45° і 60°. Знайдіть об'єм призми.

**473.** Знайдіть об'єм похилої призми, в основі якої лежить трикутник зі сторонами 6 см, 5 см і 5 см, а бічне ребро дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30°.

**474.** Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см. Одне з бічних ребер дорівнює 4 см і утворює із суміжними сторонами основи кути, які дорівнюють 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**475.** В основі похилого паралелепіпеда лежить паралелограм зі сторонами 3 см, 7 см і діагоналлю 6 см. Діагональний переріз, що проходить через більшу діагональ паралелограма, перпендикулярний до площини основи, і його площа дорівнює 80 см$^2$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**476.** Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 7 см, дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні і мають площі 56 см$^2$ і 63 см$^2$. Знайдіть об'єм призми.

**477.** У правильній шестикутній призмі площі двох граней дорівнюють $6\sqrt{3}$ см$^2$ і $24\sqrt{3}$ см$^2$. Знайдіть об'єм призми. Скільки розв'язків має задача?

**478.** У правильній шестикутній призмі сторона основи дорівнює 3 см, а більша діагональ нахилена до основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм призми.

**479.** В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом $\alpha$ при основі і бічною стороною $a$. Діагональ бічної грані, що містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм призми.

**480.** В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гострим кутом $\alpha$ і протилежним катетом $a$. Площа бічної грані, що містить цей катет, дорівнює $S$. Знайдіть об'єм призми.

**481.** В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з гострим кутом $\alpha$ і діагоналлю $d$, яка є бісектрисою цього кута. Більша діагональ призми утворює кут $\beta$ з бічним ребром. Знайдіть об'єм призми.

**482.** В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом $\alpha$ і діагоналлю $d$, яка є бісектрисою цього кута. Діагональ призми утворює з основою кут $\beta$. Знайдіть об'єм призми.

**483.** Знайдіть об'єм циліндра з площею основи $S$ і площею осьового перерізу $Q$.

**484.** Паралельно осі циліндра проведено площину, що відтинає від кола основи дугу $\alpha$. Діагональ перерізу дорівнює $d$ й утворює з другою діагоналлю кут $\varphi$. Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

**485.** В основі циліндра проведено хорду, яка стягує дугу $\alpha$. Відрізок, що сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює $m$ й утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм циліндра.

**486.** У циліндричну посудину налили 5 л води. Рівень води склав 40 см. У воду повністю занурили деяке тіло, при цьому рівень води в посудині збільшився на 15 см. Знайдіть об'єм зануреного тіла.

**487.** У посудину, що має форму правильної трикутної призми, налили воду, рівень води склав 80 см. Яким буде рівень води, якщо перелити її в іншу посудину тієї ж форми зі стороною основи в 4 рази більшою, ніж у першій посудині?

**488.** Відповідно до прийнятих норм охорони здоров'я на одного учня чи ученицю має приходитися 6 м$^3$ повітря. Скільки учнів може навчатися в класі розмірами 10 м $\times$ 6 м $\times$ 3,5 м?

## Рівень В

**489.** Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 30 см$^2$, а площі бічних граней 5 см$^2$, 12 см$^2$ і 13 см$^2$. Знайдіть об'єм даної призми.

**490.** Два циліндри, осьовими перерізами яких є рівні квадрати, перетинаються так, що твірна одного є віссю другого. Знайдіть об'єм спільної частини цих циліндрів, якщо їхня твірна дорівнює $l$.

**491.** У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутник зі сторонами $a$ і $b$. Діагональ призми нахилена до основи під кутом $\gamma$. Знайдіть об'єм циліндра.

**492.** У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом $a$ і протилежним кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює $H$.

**493.** У призму, основою якої є прямокутна трапеція, вписано циліндр з діаметром основи $d$ і твірною $l$. Знайдіть об'єм призми, якщо більша бічна сторона трапеції дорівнює $b$.

**494.** У правильну трикутну призму вписано циліндр із радіусом основи $r$ і твірною $l$. Знайдіть об'єм призми.

**495.** У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.

**496.** У правильну чотирикутну призму вписано циліндр, у циліндр — правильну трикутну призму. Знайдіть відношення об'ємів призм.

**497.** В основі прямої призми лежить ромб із тупим кутом $\alpha$. Переріз, проведений через більшу діагональ нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, нахилений до основи під кутом $\beta$. Площа цього перерізу дорівнює $Q$. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

**498.** В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з кутом $\alpha$. Через протилежний катет нижньої основи і вершину кута $\alpha$ верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми, якщо перпендикуляр, проведений із вершини кута $\alpha$ нижньої основи до перерізу, дорівнює $d$.

**499.** Знайдіть об'єм деталі, зображеної на рис. 134, яка складається з двох рівних частин циліндра.

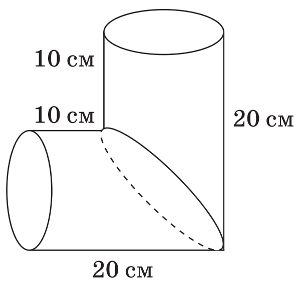



**Рис. 134**

# Повторення перед вивченням § 11

## Теоретичний матеріал

- піраміда; 11 клас, § 3
- зрізана піраміда; 11 клас, п. 5.2
- конус; 11 клас, § 8
- куля і сфера. 11 клас, § 9

## Задачі

**500.** У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до основи під кутом $60°$. Знайдіть кут, під яким нахилені до основи бічні грані піраміди.

**501.** Площа основи конуса дорівнює $S$, а кут при вершині осьового перерізу — $\alpha$. Знайдіть висоту конуса.

# § 11 Об'єми піраміди, конуса, кулі та їх частин

## 11.1. Загальна формула об'єму

Розглянемо спосіб обчислення об'ємів тіл, у підґрунті якого лежить поняття інтеграла, відоме вам із курсу алгебри та початків аналізу. Нехай тіло $T$, об'єм якого потрібно обчислити, розміщене між двома паралельними площинами $\alpha$ і $\beta$. Введемо систему координат у такий спосіб, щоб вісь $Ox$ була перпендикулярною до площин $\alpha$ і $\beta$ (рис. 135). Нехай площина $\alpha$ має рівняння $x = a$, а площина $\beta$ — $x = b$ $(a < b)$.

Будемо надалі розглядати випадок, коли будь-який переріз тіла $\Phi(x)$ площиною, яка перпендикулярна до осі $Ox$ та перетинає цю вісь у точці $(x; 0; 0)$, — круг або многокутник (можливий такий випадок, коли $\Phi(x)$ — точка). Позначимо площу фігури $\Phi(x)$ через $S(x)$. Припустимо, що $S(x)$ — неперервна функція при $x \in [a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на $n$ рівних відрізків точками $a = x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n = b$ та через точки з абсцисами $x_i$ проведемо площини, перпендикулярні до осі $Ox$ (рис. 136).

Ці площини розіб'ють тіло $T$ на $n$ тіл: $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$. Якщо переріз $\Phi(x_i)$ — круг, то об'єм тіла $T_i$ наближено дорівнює об'єму циліндра з основою $\Phi(x_i)$ та висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Якщо

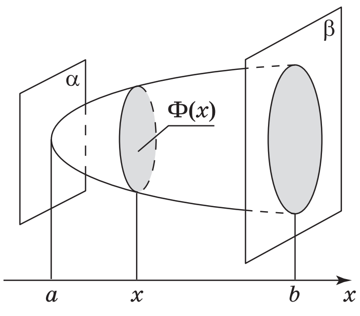



**Рис. 135.** До обґрунтування загальної формули об'єму тіла

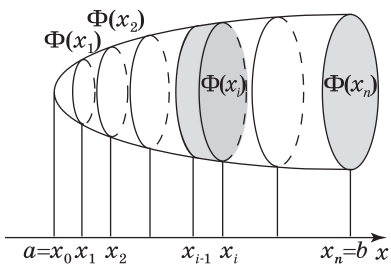


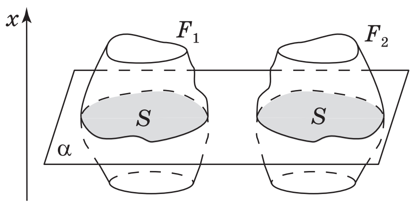

**Рис. 136.** Розбиття тіла на $n$ тіл

переріз $\Phi(x_i)$ — многокутник, то об’єм тіла $T_i$ наближено дорівнює об’єму прямої призми з основою $\Phi(x_i)$ та висотою $\Delta x_i$. Враховуючи, що об’єм циліндра та призми дорівнює добутку площі основи на висоту, тобто $V_{T_i} \approx S(x_i) \cdot \Delta x_i$, маємо:

$$V_T \approx S(x_1) \cdot \Delta x_1 + S(x_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + S(x_n) \cdot \Delta x_n.$$

При необмеженому збільшенні $n$ права частина даної формули наближається як завгодно близько до об’єму тіла $T$. З іншого боку, оскільки $S(x)$ неперервна на $[a;b]$, цей самий вираз наближається до відповідного інтеграла. Отже, $\boldsymbol{V_T = \int_a^b S(x)dx}$. Таким чином, ми отримали формулу для обчислення об’єму тіла за допомогою інтеграла. Будемо називати її ***інтегральною формулою об’єму.***

З цієї формули випливає цікавий та зручний у застосуванні наслідок, формулювання якого належить італійському математику Бонавентурі Кавальєрі.




$V_{F_1} = V_{F_2}$

**Рис. 137.** До обґрунтування принципу Кавальєрі

## Принцип Кавальєрі

*Якщо при перетині двох тіл* $F_1$ *і* $F_2$ *площинами, паралельними одній і тій самій площині* $\alpha$*, у перерізі одержуються фігури з рівними площами, то об’єми даних тіл рівні між собою.*

Це твердження легко вивести з інтегральної формули об’єму, якщо розташувати систему координат так, щоб вісь $Ox$ була перпендикулярною до площини $\alpha$ (рис. 137). Застосування інтеграла та принципу Кавальєрі дає можливість легко обчислити об’єми багатьох важливих тіл.

## 11.2. Об'єм піраміди та конуса. Комбінація конуса та піраміди

У пунктах 10.3 і 10.4 ми встановили, що об'єми призми та циліндра виражаються однією і тією самою формулою:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Тому цілком природно припустити, що так само будуть збігатися формули для об'ємів піраміди та конуса.

### Теорема (формула об'єму піраміди)

Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди, $h$ — висота.

Доведення

□ Розмістимо піраміду в системі координат так, щоб вісь $Ox$ була напрямлена вздовж висоти, а основа належала б площині $yOz$ (рис. 138). Нехай деяка площина паралельна основі піраміди та перетинає її висоту в точці $(x; 0; 0)$. Позначимо через $S(x)$ площу перерізу піраміди площиною. За доведеним у п. 5.2 ця площина відтинає меншу піраміду, основа якої є многокутником, подібним до основи заданої піраміди, причому коефіцієнт подібності $k$ дорівнює відношенню висот цих пірамід.

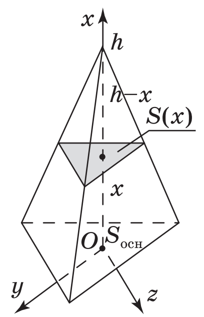



**Рис. 138.** До доведення формули об'єму піраміди

Тоді $\dfrac{S(x)}{S_{\text{осн}}} = k^2 = \left(\dfrac{h-x}{h}\right)^2$.

Звідси $S(x) = \dfrac{(h-x)^2 \cdot S_{\text{осн}}}{h^2}$.

Застосовуючи для піраміди інтегральну формулу об'єму, маємо:

$$V = \int_0^h \frac{S_{\text{осн}}}{h^2} \cdot (h-x)^2\, dx = -\frac{S_{\text{осн}}}{h^2} \cdot \frac{(h-x)^3}{3} \Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{S_{\text{осн}}}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Теорему доведено. ■

## Наслідок (формула об'єму зрізаної піраміди)

Об'єм зрізаної піраміди обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right),$$

де $h$ — висота зрізаної піраміди, $S_1$ та $S_2$ — площі її основ.

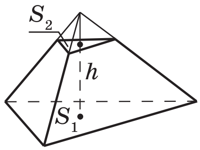



**Рис. 139.** До доведення формули об'єму зрізаної піраміди

### Доведення

☐ Доповнюємо дану зрізану піраміду до повної з висотою $H$ (рис. 139). Тоді висота доповняльної піраміди дорівнюватиме $H - h$. Нехай площі основ повної та доповняльної пірамід дорівнюють $S_1$ та $S_2$ відповідно. Тоді:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2.$$

Звідси $1 - \frac{h}{H} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$, $\frac{h}{H} = 1 - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$, $H = \frac{h}{1 - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}} = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.

За аксіомами об'єму, об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів повної і доповняльної пірамід. Отже,

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot H - \frac{1}{3}S_2 \cdot (H-h) = \frac{1}{3}\left(S_1 \cdot \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2\left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h\frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right)\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

Формулу доведено. ■

Зазначимо, що при доведенні теореми про об'єм піраміди та її наслідка, крім інтегральної формули об'єму, ми застосовували лише той факт, що площина, паралельна основі, відтинає піраміду, для площі основи якої $S(x)$ та висоти $h-x$ справджується формула $\frac{S(x)}{S_{осн}}=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$.

Але така сама формула, за доведеним у п. 8.2, є правильною і для конуса (рис. 140). Тому аналогічними до формул об'єму та їх доведень для піраміди і зрізаної піраміди є формули об'єму та їх доведення для конуса та зрізаного конуса.

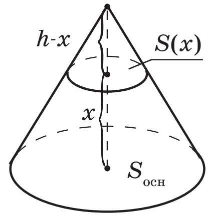



**Рис. 140.** До обґрунтування формули об'єму конуса

### Теорема (формула об'єму конуса)

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

де $S_{осн}$ — площа основи конуса, $R$ — радіус, $h$ — висота.

### Наслідок (формула об'єму зрізаного конуса)

Об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right),$$

де $h$ — висота зрізаного конуса, $S_1$ і $S_2$ — площі його основ, $R_1$ і $R_2$ — радіуси його основ.

За допомогою вписаних та описаних призм ми з'ясували формулу для об'єму циліндра. Подібний зв'язок можна встановити також для конусів і пірамід.

### Означення

Піраміда називається **вписаною в конус**, якщо їхні вершини збігаються, а основа піраміди вписана в основу конуса.

При цьому конус називається описаним навколо піраміди.

Очевидно, що висоти піраміди й описаного конуса рівні, а бічні ребра піраміди є твірними конуса (рис. 141).

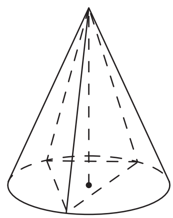


**Рис. 141.** Піраміда, вписана в конус

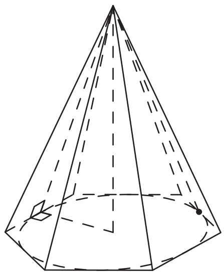


**Рис. 142.** Піраміда, описана навколо конуса

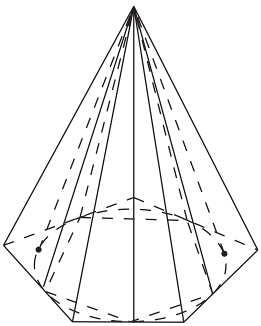


**Рис. 143.** До обґрунтування формули об'єму конуса за допомогою пірамід

### Означення

Піраміда називається **описаною навколо конуса**, якщо їхні вершини збігаються, а основа піраміди описана навколо основи конуса.

При цьому конус називається вписаним в піраміду.

Очевидно, що висоти піраміди й вписаного конуса рівні, а висоти бічних граней піраміди є твірними конуса (рис. 142).

Розглянемо правильні $n$-кутні піраміди, вписані в даний конус, та правильні $n$-кутні піраміди, описані навколо нього (рис. 143).

Якщо кількість $n$ сторін основ цих пірамід необмежено збільшується, то площі їхніх основ прямують до площі круга, який лежить в основі конуса. Отже, їхні об'єми прямують до $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Тоді існують вписані в конус та описані навколо нього піраміди з об'ємами, що як завгодно мало відрізняються від $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

З цих міркувань стає зрозумілим інше підґрунтя для формули об'єму конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Піраміди, вписана в конус та описана навколо конуса, разом із конусом утворюють ***комбінацію геометричних тіл***.

## 11.3. Об'єм кулі та її частин

Безпосередньо отримати лише з геометричних міркувань формулу для об'єму кулі дуже складно. Але за допомогою принципу Кавальєрі або інтегральної формули об'єму доведення відповідних результатів є простим та наочним.

### Теорема (формула об'єму кулі)

*Об'єм кулі радіуса $R$ обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.*

### Доведення

□ Знайдемо спочатку об'єм півкулі, застосувавши принцип Кавальєрі.

Нехай дано півкулю $F_1$ радіуса $R$. На площину $\alpha$, що містить основу півкулі, поставимо циліндр, радіус та висота якого також дорівнюють $R$. У циліндр впишемо конус, вершина якого збігається з центром основи циліндра в площині $\alpha$, а основа — з іншою основою циліндра (рис. 144).

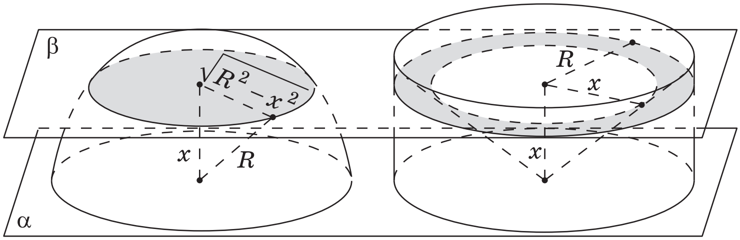



**Рис. 144.** До доведення формули об'єму кулі

Порівняємо об'єм $V_1$ півкулі $F_1$ з об'ємом $V_2$ тіла $F_2$, обмеженого нижньою основою циліндра та бічними поверхнями циліндра і конуса.

Проведемо площину $\beta$, паралельну площині $\alpha$ і віддалену від неї на відстань $x$ ($0 \leqslant x \leqslant R$). Ця площина перетне дану півкулю по кругу радіуса $\sqrt{R^2-x^2}$ і площі $\pi\cdot\left(R^2-x^2\right)$, а тіло $F_2$ — по кільцю. Оскільки осьовий переріз конуса є рівнобедреним прямокутним трикутником, зовнішній радіус кільця дорівнює $R$, а внутрішній — $x$. Отже, площа отриманого кільця буде $\pi\cdot\left(R^2-x^2\right)$ і дорівнюватиме площі перерізу півкулі. За принципом Кавальєрі, об'єм півкулі дорівнює об'єму тіла $F_2$, тобто різниці об'ємів циліндра та конуса: $\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3$. Об'єм кулі вдвічі більший за об'єм півкулі, отже, обчислюється за формулою $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Теорему доведено. ■

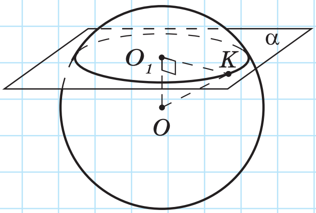



Рис. 145

**Задача**

Переріз кулі, віддалений від її центра на 1 см, має площу $8\pi$ см$^2$. Знайдіть об'єм кулі.

**Розв'язання**

Нехай дано кулю з центром $O$. Переріз кулі деякою площиною $\alpha$ є кругом із центром $O_1$, причому $OO_1 \perp \alpha$. Оскільки $O$ віддалена від $\alpha$ на 1 см, то $OO_1 = 1$ см.

Нехай точка $K$ сфери, яка обмежує кулю, належить даному перерізу (рис. 145). Тоді площа перерізу дорівнює $\pi \cdot O_1K^2 = 8\pi$, звідки $O_1K = 2\sqrt{2}$ (см). З прямокутного трикутника $OO_1K$ за теоремою Піфагора маємо:

$$R = OK = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = 3 \text{ (см)}.$$

За формулою об'єму кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 36\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: $36\pi$ см$^3$.

Знайдемо тепер об'єми частин кулі.

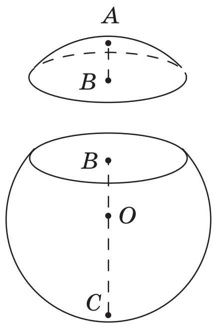



**Рис. 146.** Кульові сегменти

### Означення

**Кульовим сегментом** називається частина кулі, яку відтинає від неї деяка площина.

На рис. 146 площина перерізу, що проходить через точку $B$, ділить кулю на два сегменти. Круг, отриманий у перерізі, називається ***основою*** цих сегментів, а довжини відрізків діаметра, перпендикулярного до площини перерізу, — ***висотами*** сегментів. Так, на рис. 146 $AB = H_1$ — висота меншого сегмента, $BC = H_2$ — висота більшого сегмента.

## Теорема (формула об'єму кульового сегмента)

Об'єм кульового сегмента обчислюється за формулою

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

де $R$ — радіус кулі, $H$ — висота сегмента.

Доведення

☐ Застосуємо для кульового сегмента інтегральну формулу об'єму.

Введемо декартову систему координат таким чином, щоб її початок збігався з центром кулі.

Тоді частина кулі, обмежена площинами $x=R-H$ і $x=R$, є кульовим сегментом з висотою $H$ (рис. 147).

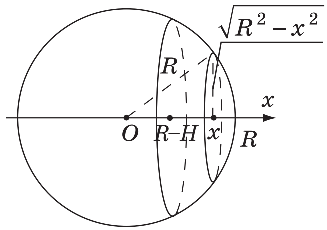



**Рис. 147.** До доведення формули об'єму кульового сегмента

Радіус перерізу кульового сегмента площиною, яка перетинає вісь $Ox$ у точці $(x;0;0)$, дорівнює $\sqrt{R^2-x^2}$. Отже, площа цього перерізу $S(x)=\pi\left(R^2-x^2\right)$.

За інтегральною формулою об'єму для кульового сегмента маємо:

$$V=\int_{R-H}^{R}\left(\pi\left(R^2-x^2\right)\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2(R-H)+\frac{(R-H)^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^3+R^2H+\frac{1}{3}\left(R^3-3R^2H+3RH^2-H^3\right)\right)=\frac{\pi}{3}\left(3RH^2-H^3\right)=$$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

Теорему доведено. ■

Зауважимо, що при $H=2R$ зі щойно доведеної формули випливає ще один спосіб отримання формули об'єму кулі:

$$V=\pi(2R)^2\left(R-\frac{2R}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

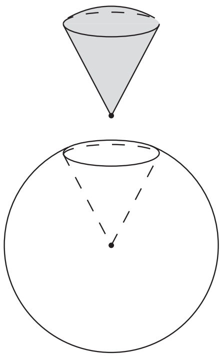


**Рис. 148.** Кульові сектори

### Означення

**Кульовим сектором** називається тіло, обмежене сферичною поверхнею кульового сегмента та бічною поверхнею конуса, який має спільну основу із сегментом і вершина якого збігається з центром кулі.

Очевидно, що коли кульовий сегмент менший від півкулі, його доповнюють конусом для отримання кульового сектора; якщо ж кульовий сегмент більший за півкулю, то для отримання кульового сектора конус вилучають (рис. 148).

### Теорема (формула об'єму кульового сектора)

Об'єм кульового сектора обчислюється за формулою

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

де $R$ — радіус кулі, $H$ — висота відповідного кульового сегмента.

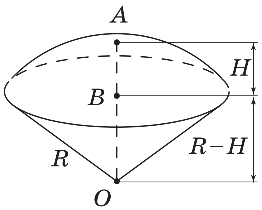



**Рис. 149.** До доведення формули об'єму кульового сектора

#### Доведення

□ Розглянемо випадок кульового сектора, висота $H$ відповідного кульового сегмента для якого менша від $R$ (рис. 149).

Тоді його об'єм є сумою об'єму сегмента $V_1$ та об'єму конуса $V_2$. Отже,

$$V=V_1+V_2=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)+\frac{1}{3}\pi\left(R^2-(R-H)^2\right)(R-H)=$$

$$=\pi\left(H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)+\frac{1}{3}H(2R-H)(R-H)\right)=$$

$$=\pi\left(H^2R-\frac{H^3}{3}+\frac{2R^2H}{3}-\frac{2RH^2}{3}-\frac{H^2R}{3}+\frac{H^3}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi R^2H.$$

Випадок, коли висота $H$ більша або дорівнює $R$, розгляньте самостійно.

Теорему доведено. ■

### Означення

**Кульовим шаром (поясом)** називається частина кулі, розташована між двома паралельними січними площинами.

Відстань між цими площинами називається ***висотою кульового шару***, а перерізи, що обмежують шар, — ***основами кульового шару*** (рис. 150).

Зауважимо, що об'єм кульового шару можна обчислити у два способи:

1) як різницю об'ємів двох кульових сегментів;

2) як різницю об'єму кулі та об'ємів двох сегментів, що не входять у шар.

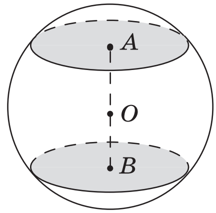



**Рис. 150.** Кульовий шар (пояс)

# Запитання і задачі

## Обговорюємо теорію

**502.** Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо:
а) її висоту збільшити в 3 рази, а сторону основи зменшити в 3 рази;
б) її висоту зменшити у 2 рази, а сторону основи збільшити у 2 рази?

**503.** Знайдіть відношення об'ємів двох конусів, якщо:
а) їхні радіуси рівні, а висоти відносяться як $1:3$;
б) їхні висоти рівні, а радіуси відносяться як $1:3$.

**504.** Відношення об'ємів двох куль дорівнює 8. Як відносяться їхні діаметри?

**505.** Скільки треба взяти пластилінових кульок із радіусом 2 см, щоб зробити одну кульку з радіусом 6 см?

## Моделюємо

**506.** З паперу виріжте круговий сектор із центральним кутом $300°$ і радіусом 5 см. Використовуючи цей сектор, зробіть модель конуса. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

**507.** Уменште розміри піраміди Хеопса у 1000 разів і змоделюйте її аналог із картону. Знайдіть об'єм моделі.

**508.** Візьміть 10 зошитів та змоделюйте з них прямокутний паралелепіпед. Потім злегка розсуньте отриману пачку. Порівняйте об'єми початкової та отриманої фігур. Зробіть висновки на основі аксіом об'єму та принципу Кавальєрі.

**509.** Порівняйте об'єми м'якої (їстівної) частини товстошкірого апельсина і його шкірки.

## Розв'язуємо задачі

### Рівень А

**510.°** Знайдіть об'єм піраміди з висотою 10 см, якщо основою піраміди є:

а) трикутник зі сторонами 3 см і 8 см і кутом 30° між ними;

б) ромб із діагоналями 6 дм і 8 дм;

в) трапеція з основами 8 см і 12 см і висотою 9 см.

**511.°** Знайдіть об'єм піраміди з висотою 8 см, якщо основою піраміди є:

а) паралелограм зі сторонами 5 см і 12 см і кутом 150°;

б) трикутник зі сторонами 4 см, 51 см і 53 см;

в) прямокутник з діагоналлю 15 дм і відношенням сторін 3:4.

**512.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, якщо:

а) її апофема дорівнює $a$, а двогранний кут при основі дорівнює $\alpha$;

б) кут між її бічним ребром і основою дорівнює $\beta$, а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $R$.

**513.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо:

а) її висота дорівнює $h$, а апофема дорівнює $a$;

б) її бічне ребро дорівнює $l$, а плоский кут при вершині дорівнює $\varphi$.

**514.** Висота піраміди дорівнює $h$, а бічне ребро нахилене до основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм:

а) правильної чотирикутної піраміди;

б) правильної трикутної піраміди.

**515.** В основі піраміди лежить прямокутник із діагоналлю 30 см і кутом між діагоналями 60°. Усі бічні ребра нахилені до основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм піраміди.

**516.** В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

**517.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою 10 см, периметр якого дорівнює 36 см. Усі бічні грані нахилені до основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

**518.** В основі піраміди лежить ромб зі стороною 4 см і тупим кутом 120°. Кожний двогранний кут при основі піраміди дорівнює 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

**519.** Висота зрізаної піраміди дорівнює 6 см, об'єм дорівнює 28 $см^3$, а площа однієї з основ — 8 $см^2$. Знайдіть площу другої основи.

**520.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, площі основ якої дорівнюють 4 $см^2$ і 16 $см^2$, а апофема дорівнює $\sqrt{10}$ см.

**521.°** Знайдіть об'єм конуса, якщо:
а) його висота дорівнює 6 см, а радіус 2 см;
б) його твірна дорівнює 13 см, а діаметр 10 см;
в) його твірна дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а кут між твірною й основою конуса 45°.

**522.°** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 2 см і 6 см, а твірна — 5 см. Знайдіть об'єм конуса.

**523.°** Діаметри основ зрізаного конуса дорівнюють 12 см і 18 см, а об'єм — $399\pi$ $см^3$. Знайдіть висоту конуса.

**524.** Площа осьового перерізу конуса дорівнює $Q$, а об'єм — $V$. Знайдіть радіус конуса.

**525.** Площа основи конуса дорівнює $S$, а об'єм — $V$. Знайдіть висоту конуса.

**526.°** Знайдіть об'єм кулі, якщо:
а) її радіус дорівнює 3 см;
б) її діаметр дорівнює 12 см;
в) площа її великого круга дорівнює $4\pi$ $см^2$.

**527.** Знайдіть радіус кулі, яку переплавили з металічного куба з ребром 2 см.

## Рівень Б

**528.** У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічним ребром кут $\alpha$. Відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює $d$. Знайдіть об'єм піраміди.

**529.** У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань між серединою висоти і серединою бічного ребра дорівнює $m$.

**530.** У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут $\alpha$, а відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює $a$. Знайдіть об'єм піраміди.

**531.** У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут $\beta$, а відстань від основи висоти до середини бічного ребра дорівнює $d$. Знайдіть об'єм піраміди.

**532.** Основою піраміди є прямокутний трикутник із гіпотенузою $c$ і гострим кутом $\alpha$. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди.

**533.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою $b$ і кутом $\beta$ при вершині. Усі бічні ребра утворюють із висотою кут $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди.

**534.** В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною $c$ і гострим кутом $\alpha$. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $\gamma$.

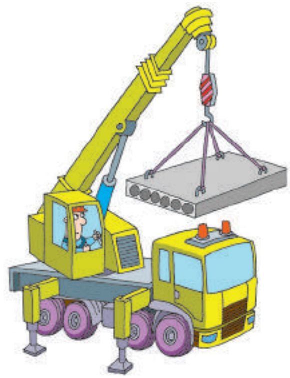
**535.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом $\alpha$ при основі й радіусом вписаного кола $r$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо всі двогранні кути при основі дорівнюють $\gamma$.

**536.** Основою піраміди є ромб із гострим кутом $\beta$. Усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, дорівнюють $h$ і нахилені до площини її основи під кутом $\gamma$. Знайдіть об'єм піраміди.

**537.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом $\alpha$ при основі і радіусом вписаного кола $r$. Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до основи, а третя — нахилена до неї під кутом $\varphi$. Знайдіть об'єм піраміди.

**538.** З циліндричної заготовки, висота якої дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого з можливих розміру. Скільки відсотків матеріалу пішло у відходи?

**539.** Залізобетонна плита має розміри $600 \times 200 \times 22$ см. Уздовж її довжини зроблено 6 наскрізних циліндричних отворів діаметром 14 см. Знайдіть масу панелі, якщо густина матеріалу, з якого вона виготовлена, дорівнює 2,5 т/м$^3$. Дізнайтеся, у яких містах в України виготовляють залізобетонні плити, якими вони є за призначенням. Дізнайтеся докладніше про процес виробництва залізобетонних виробів.



**540.** Щоб запобігти паркуванню автомобілів, на площі міста було встановлено 50 однакових суцільних бетонних півкуль радіусом 30 см. Який об'єм бетону знадобився для виготовлення цих півкуль? Зміною об'єму під час твердіння бетону знехтуйте. Округліть відповідь до десятих метра кубічного.

**541.** Стіг сіна має форму циліндра, на який зверху встановлено конус із тією ж основою радіуса 2,5 м. Висота стогу 4 м, причому висота циліндричної частини — 2,2 м. Визначте масу сіна в стозі, якщо густина сіна 0,03 г/см$^3$.

**542.** Запаси льоду в Антарктиді становлять приблизно 30 млн м$^3$. На скільки метрів піднявся б рівень Світового океану, якби весь цей лід розтанув? Радіус Землі дорівнює 6400 км. Знайдіть у мережі Інтернет решту необхідної для розв'язання задачі інформації. Яка кількість льоду тане щорічно в Антарктиді? в Антарктиці? Чим це зумовлене? Чи створює небезпеку для людства? За необхідності проконсультуйтесь із вчителем географії.

**543.** В основі піраміди лежить квадрат. Дві суміжні бічні грані перпендикулярні до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом $\gamma$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо найменше бічне ребро піраміди дорівнює $a$.

**544.** Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом $a$ і протилежним кутом $\alpha$. Бічна грань, що містить цей катет, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди.

**545.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із бічною стороною $b$ і кутом $\beta$ при вершині. Бічна грань, що містить основу трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом $\gamma$. Знайдіть об'єм піраміди.

**546.** У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють $a$ і $b$ $(a > b)$, а бічне ребро нахилене до більшої основи під кутом $\varphi$. Знайдіть об'єм піраміди.

**547.** Сторона однієї з основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 3 см, висота — 15 см, а об'єм — 185 см$^3$. Знайдіть сторону другої основи.

**548.** Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 120°, проведено переріз. Площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ см$^2$. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між висотою і твірною дорівнює 60°.

**549.** Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до основи. Площина перетинає основу конуса по хорді, яка дорівнює радіусу основи конуса і віддалена від її центра на 3 см. Знайдіть об'єм конуса.

**550.** Рівнобедрений трикутник з основою $a$ і висотою $h$, проведеною до основи, обертається навколо основи. Знайдіть об'єм фігури обертання.

**551.** Рівносторонній трикутник зі стороною $a$ обертається навколо сторони. Знайдіть об'єм фігури обертання.

**552.** Об'єм зрізаного конуса дорівнює $31\pi$ см$^3$, а твірна — радіусу більшої основи. Знайдіть радіуси основ конуса, якщо відношення висоти до твірної дорівнює 3:5.

**553.** Осьовий переріз зрізаного конуса має площу 42 см$^2$. Знайдіть радіуси основ конуса, якщо його об'єм дорівнює $78\pi$ см$^3$, а висота — 6 см.

**554.** Знайдіть об'єм кулі, якщо площа перерізу, віддаленого від центра кулі на відстань $d$, дорівнює $S$.

**555.** Переріз кулі площиною має діаметр 24 см. На якій відстані від центра кулі проходить площина перерізу, якщо об'єм кулі дорівнює $4500\pi$ см$^3$?

**556.** У кулі проведено дві площини перпендикулярно до діаметра. Знайдіть об'єм кожної частини, якщо діаметр кулі дорівнює 18 см, а площини ділять діаметр на три рівні частини.

**557.** Визначте об'єм меншого кульового сектора кулі радіуса $R$, якщо кут осьового перерізу сектора дорівнює $\alpha$.

**558.** Кулю розрізали на дві частини. Площина перерізу проходить на відстані 12 см від центра кулі. Знайдіть об'єм кожної частини, якщо об'єм кулі дорівнює $4500\pi$ см$^3$.

## Рівень В

**559.** У правильній трикутній піраміді апофема утворює з бічним ребром кут $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює $r$.


**560.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди з бічним ребром $l$ і плоским кутом при вершині $\alpha$.

**561.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди з висотою $h$ і плоским кутом при вершині $\alpha$.

**562.** У правильній трикутній піраміді двогранний кут при бічному ребрі дорівнює $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює $b$.

**563.** У правильній чотирикутній піраміді відрізок, що сполучає основу її висоти із серединою бічного ребра, нахилений до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її апофема дорівнює $b$.

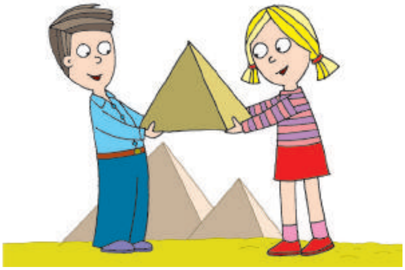
**564.** В основі піраміди лежить гострокутний трикутник із кутами $\alpha$ і $\beta$. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $\gamma$. Відстань від основи висоти піраміди до спільної сторони заданих кутів трикутника дорівнює $l$. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

**565.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою $a$ і кутом $\alpha$ при вершині. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють $\gamma$. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

**566.** Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом $\alpha$ і діагоналлю, перпендикулярною до бічної сторони. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут $\beta$. Відстань від основи висоти піраміди до бічної сторони трапеції дорівнює $b$. Визначте об’єм конуса, описаного навколо цієї піраміди.

**567.** У піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з тупим кутом $\beta$, вписано конус. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють $\gamma$. Відстань від основи висоти піраміди до вершини тупого кута трапеції дорівнює $a$. Визначте об’єм конуса.

**568.** Знайдіть у мережі Інтернет інформацію про перетворення подібності та подібні тіла у просторі. Користуючись цією інформацією та раніше вивченим матеріалом, доведіть, що відношення об’ємів подібних тіл (паралелепіпедів, призм, пірамід, циліндрів, конусів, куль, зрізаних пірамід, зрізаних конусів) дорівнює кубу коефіцієнта подібності. Поміркуйте, як можна використати цю властивість, створюючи макети будівель, пам’ятників тощо.



**569.** Об’єми тіл, одержаних від обертання прямокутного трикутника навколо катетів і гіпотенузи, дорівнюють $V_a$, $V_b$ і $V_c$ відповідно. Доведіть, що $\frac{1}{V_c^2}=\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}$.

**570.** У правильній трикутній піраміді відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює $c$. Знайдіть об’єм піраміди, якщо бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $\gamma$.

**571.** Тетраедр $PABC$ розрізали по бічних ребрах і отримали розгортку — квадрат зі стороною 1 дм. Знайдіть об’єм тетраедра.

# Повторення перед вивченням § 12

## Теоретичний матеріал

- довжина кола; 9 клас, § 19
- призми, описані навколо циліндра; 11 клас, п. 10.4
- піраміда, описана навколо конуса; 11 клас, п. 11.2
- кульові сегмент та пояс. 11 клас, п. 11.3

## Задачі

**572.** У циліндрі паралельно до його осі проведено переріз, діагональ якого дорівнює 41 см. Висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус основи — 25 см. На якій відстані від осі проведено цей переріз?

**573.** Через дві твірні конуса проведено площину, яка перетинає основу конуса по хорді завдовжки 4 см. Хорду видно з центра основи під кутом 60°. Площа утвореного перерізу дорівнює 8 см$^2$. Обчисліть кут між площиною перерізу і площиною основи конуса.

# § 12 Площі поверхонь геометричних тіл

## 12.1. Поняття про площу поверхні. Площа поверхні циліндра

Під площею поверхні многогранника ми розуміємо суму площ усіх його граней. Як же встановити площу поверхні тіла, що не є многогранником? На практиці це роблять у такий спосіб. Розбивають поверхню на такі частини, які вже мало відрізняються від плоских. Тоді знаходять площі цих частин, ніби вони є плоскими. Сума отриманих площ є наближеною площею поверхні. Наприклад, площа даху будівлі отримується як сума площ шматків листового металу. Ще краще це видно на прикладі земної поверхні. Приблизно вона має форму кулі. Але площі невеликих ділянок вимірюють у такий спосіб, нібито ці ділянки є плоскими. Більше того, під ***площею поверхні тіла*** будемо розуміти границю площ повних поверхонь описаних навколо нього многогранників. При цьому повинна виконуватись умова, за якої всі точки поверхні цих многогранників стають як завгодно близькими до поверхні даного тіла. Для конкретних тіл обертання поняття описаного многогранника буде уточнене.

Розглянемо периметри $P_n$ та площі $S_n$ правильних $n$-кутників, описаних навколо круга радіуса $R$. Під час доведення формул для площі круга та довжини кола було отримано, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi R^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi R$.

Застосуємо дані співвідношення при обґрунтуванні формули для площі бічної поверхні циліндра.

При обчисленні об'єму циліндра у пригоді стали правильні вписані в нього призми. Знайдемо за допомогою аналогічних міркувань площу бічної поверхні циліндра.

Опишемо навколо даного циліндра радіуса $R$ та висоти $h$ правильну $n$-кутну призму (рис. 151). Площа її бічної поверхні дорівнює

$$S_{\text{бічн. пр}_n} = P_{\text{осн}_n} \cdot h,$$

де $P_{\text{осн}_n}$ — периметр основи призми.

При необмеженому збільшенні $n$ маємо:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{\text{бічн. пр}\,n} = \lim_{n\to\infty} P_{\text{осн}\,n} \cdot h = 2\pi Rh,$$

оскільки периметри основ призми наближаються до довжини кола основи циліндра, тобто до $2\pi R$.

Враховуючи, що сума площ двох основ призми наближається до $2\pi R^2$, отримуємо, що площа повної поверхні циліндра дорівнює $S + 2\pi R^2$. Але сума площ двох основ циліндра дорівнює $2\pi R^2$. Тому знайдену величину $S$ приймають за площу бічної поверхні циліндра.

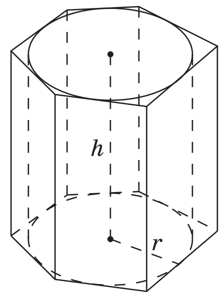




**Рис. 151.** До обґрунтування формули площі бічної поверхні циліндра

Отже, **площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою**

$$\boldsymbol{S_{\text{бічн}} = 2\pi Rh},$$

**де $R$ — радіус циліндра, $h$ — його висота.**

Зауважимо, що ця формула є аналогічною до відповідної формули площі бічної поверхні прямої призми $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot h$.

За **площу повної поверхні циліндра** приймають суму площ бічної поверхні та двох основ:

$$\boldsymbol{S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+h)}.$$

Розглянемо розгортку бічної поверхні циліндра з радіусом $R$ та висотою $h$. Це прямокутник $ABB_1A_1$, утворений у результаті розрізання бічної поверхні циліндра по твірній $AB$ та розгортання її на площину (рис. 152).

Очевидно, що сторона $BB_1$ цього прямокутника є розгорткою кола основи циліндра, отже, $BB_1 = 2\pi R$. Сторона $AB$ дорівнює твірній циліндра, тобто $AB = h$. Отже, площа розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює $2\pi Rh$. Таким чином, **площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі її розгортки.**

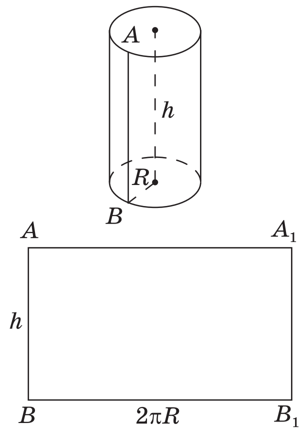




**Рис. 152.** Розгортка бічної поверхні циліндра

## Задача

Паралельно осі циліндра на відстані $d$ від неї проведено площину, яка відтинає від основи дугу $\beta$. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Визначте площу бічної поверхні циліндра.

## Розв'язання

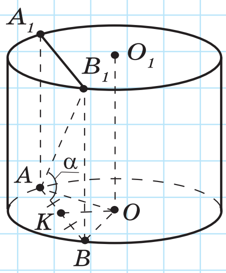



Рис. 153

Нехай дано циліндр, в основах якого лежать рівні круги з центрами $O$ та $O_1$, $OO_1$ — вісь циліндра. Розглянемо площину, яка паралельна $OO_1$. Переріз циліндра даною площиною буде прямокутником $AA_1B_1B$ (рис. 153).

Нехай хорда $AB$ відтинає від кола основи дугу $\beta < 180°$. Тоді, за означенням, $\angle AOB = \beta$. Оскільки твірні циліндра перпендикулярні до основ, $B_1B \perp (AOB)$. Отже, $AB$ — проекція $AB_1$ на площину $(AOB)$, тому кут між $AB_1$ та площиною $(AOB)$ дорівнює куту $B_1AB$. За умовою $\angle B_1AB = \alpha$.

У рівнобедреному трикутнику $AOB$ $(AO = BO = R)$ проведемо медіану $OK$. Тоді $OK \perp AB$, $\angle AOK = \frac{\beta}{2}$. Оскільки $B_1B \perp (AOB)$, то $(AA_1B_1) \perp (AOB)$ за ознакою перпендикулярних площин. Але тоді $OK \perp (AA_1B_1)$ за властивістю перпендикулярних площин. Отже, $OK$ є відстанню між точкою $O$ та площиною $(AA_1B_1)$. Враховуючи, що $OO_1 \parallel (AA_1B_1)$, за означенням відстані між паралельними прямою та площиною отримуємо, що $OK$ дорівнює відстані між $OO_1$ та площиною $(AA_1B_1)$. За умовою $OK = d$. З прямокутного трикутника $AKO$ $\left(\angle AKO = 90°,\ OK = d,\ \angle AOK = \frac{\beta}{2}\right)$ маємо: $AO = \dfrac{d}{\cos\frac{\beta}{2}}$; $AK = d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, звідки $AB = 2d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$. З прямокутного трикутника $ABB_1$ $\left(\angle ABB_1 = 90°,\ \angle B_1AB = \alpha,\ AB = 2d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)$: $BB_1 = 2d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

Отже,

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot AO \cdot BB_1 = 2\pi \cdot \frac{d}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot 2d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4\pi d^2 \sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

У випадку коли $\beta > 180^\circ$, $\angle AOB = 360^\circ - \beta$, $\angle AOK = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$,

$$AO = \frac{d}{\cos\left(180^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} = -\frac{d}{\cos\frac{\beta}{2}},\quad AK = d\,\mathrm{tg}\left(180^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = -d\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Аналогічно до попереднього, і в цьому випадку отримуємо той самий результат для площі бічної поверхні.

Відповідь: $\dfrac{4\pi d^2 \sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

## 12.2. Площа поверхні конуса та зрізаного конуса

Зв'язок між циліндрами та призмами є цілком аналогічним до зв'язку між конусами та пірамідами. Зокрема, це стосується формул для площ їхніх бічних поверхонь.

Опишемо навколо даного конуса з радіусом основи $R$ та твірною $l$ правильну $n$-кутну піраміду (рис. 154). Площа її бічної поверхні дорівнює

$$S_{\text{бічн. пір}\,n} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}\,n} \cdot l_n,$$

де $P_{\text{осн}\,n}$ — периметр основи піраміди, $l_n$ — апофема.

При необмеженому збільшенні $n$ маємо:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{\text{бічн. пір}\,n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} P_{\text{осн}\,n} \cdot \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi R l,$$

оскільки периметри основ піраміди наближаються до довжини кола основи конуса, а апофеми $l_n$ дорівнюють $l$.

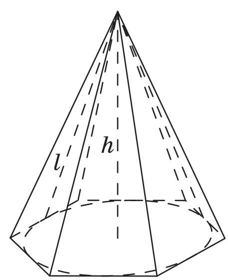



**Рис. 154.** До обґрунтування формули площі бічної поверхні конуса

Враховуючи, що площа основи піраміди наближається до $\pi R^2$, отримуємо, що площа повної поверхні конуса дорівнює $S+\pi R^2$. Але площа основи конуса дорівнює $\pi R^2$. Тому знайдену величину $S$ приймають за площу бічної поверхні конуса. Отже, **площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою**

$$\boldsymbol{S_{\text{бічн}} = \pi R l},$$

**де $\boldsymbol{R}$ — радіус основи, $\boldsymbol{l}$ — твірна.**

За площу повної поверхні конуса приймають суму площ її основи та бічної поверхні:

$$\boldsymbol{S_{\text{повн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бічн}} = \pi R^2 + \pi R l = \pi R(R+l)}.$$

Розглянемо розгортку бічної поверхні конуса. Це круговий сектор $PAA_1$, утворений у результаті розрізання бічної поверхні конуса по твірній $PA$ та розгортання її на площину (рис. 155).

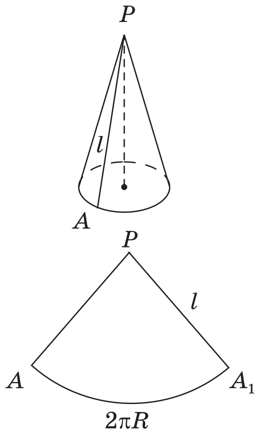



**Рис. 155.** Розгортка бічної поверхні конуса

Очевидно, що радіус сектора розгортки дорівнює твірній конуса $l$, а довжина дуги $AA_1$ — довжині кола основи конуса, тобто $2\pi R$. Враховуючи, що площа відповідного круга дорівнює $\pi R^2$, маємо: $\dfrac{S_{\text{сект}}}{\pi R^2} = \dfrac{2\pi l}{2\pi R}$, отже, $S_{\text{сект}} = \pi R l$. Таким чином, **площа бічної поверхні конуса дорівнює площі її розгортки.**

Враховуючи формулу для площі бічної поверхні конуса, нескладно знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

Розглянемо зрізаний конус, який утворився при перетині конуса з вершиною $P$ деякою січною площиною (рис. 156).

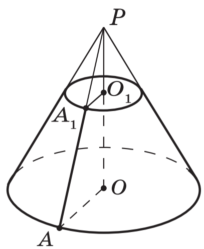



**Рис. 156.** До обґрунтування площі бічної поверхні зрізаного конуса

Нехай $A_1A$ — твірна зрізаного конуса ($AA_1 = l$), точки $O$ і $O_1$ — центри більшої та меншої основ із радіусами $R$ і $r$ відповідно. Тоді площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює різниці площ бічних поверхонь двох конусів:

$$S_{\text{бічн}} = \pi R \cdot PA - \pi r \cdot PA_1 = \pi R\left(PA_1 + A_1A\right) - \pi r \cdot PA_1 =$$
$$= \pi R l + \pi \cdot PA_1 (R - r).$$

З подібності трикутників $PA_1O_1$ та $PAO$ маємо:

$\frac{PA_1}{r}=\frac{PA}{R}$, або $\frac{PA_1}{PA_1+l}=\frac{r}{R}$. Звідси $PA_1=\frac{l\cdot r}{R-r}$.

Отже,

$$S_{\text{бічн}}=\pi Rl+\pi\cdot\frac{lr}{R-r}(R-r)=\pi(R+r)l.$$

Відтак ми отримали **формулу для обчислення бічної поверхні зрізаного конуса: $S_{\text{бічн}}=\pi(R+r)l$, де $R$ та $r$ — радіуси основ зрізаного конуса, $l$ — його твірна.**

Звідси зрозуміло, що **площа повної поверхні зрізаного конуса дорівнює $S_{\text{повн}}=\pi(R+r)l+\pi\left(R^2+r^2\right)$.**

Такий самий результат можна було б отримати, якщо знайти площу розгортки бічної поверхні зрізаного конуса або застосувати правильні зрізані піраміди, описані навколо нього. Спробуйте дати відповідні означення та проведіть необхідні міркування самостійно.

## 12.3. Зв'язок між площами поверхонь та об'ємами. Комбінація сфери та многогранника

При розгляданні об'ємів і площ поверхонь циліндра та конуса ми бачили, що існує тісний взаємозв'язок між цими фігурами та призмами й пірамідами відповідно. Виявляється, що й сфера (куля), вписана в многогранник, пов'язана з величиною його об'єму.

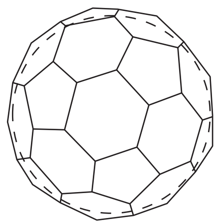


**Рис. 157.** Многогранник, описаний навколо сфери

### Означення

Сфера (куля) називається **вписаною в опуклий многогранник**, якщо вона дотикається до кожної його грані.

У цьому випадку многогранник називається описаним навколо даної сфери (рис. 157).

Розглянемо, наприклад, сферу, вписану в тетраедр (рис. 158).

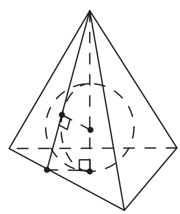


**Рис. 158.** Сфера, вписана в тетраедр

Площини, що містять грані тетраедра, є дотичними до вписаної сфери, а точки дотику лежать у гранях тетраедра. Зауважимо, що за доведеним у п. 9.2 радіуси вписаної сфери, проведені в точку дотику з поверхнею многогранника, перпендикулярні до площин граней цього многогранника.

Для описаних многокутників на площині було доведено, що їхня площа дорівнює добутку півпериметра на радіус вписаного кола. Аналогічна властивість пов'язує об'єм описаного многогранника та площу його поверхні.

### Теорема (про зв'язок площі поверхні та об'єму описаного многогранника)

*Об'єм описаного многогранника обчислюється за формулою*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{повн}} \cdot r,$$

*де $S_{\text{повн}}$ — площа повної поверхні многогранника, $r$ — радіус вписаної в нього сфери.*

**Доведення**

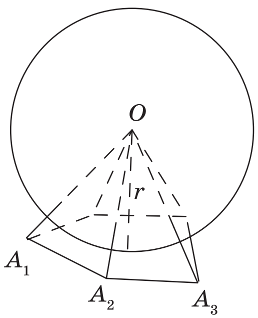



**Рис. 159.** До доведення зв'язку між площею поверхні та об'ємом описаного многогранника

☐ З'єднаємо центр вписаної сфери $O$ з усіма вершинами многогранника $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... (рис. 159). Отримаємо $n$ пірамід, основами яких є грані многогранника, вершини збігаються з точкою $O$, висоти дорівнюють $r$. Тоді об'єм многогранника, за аксіомою, дорівнює сумі об'ємів цих пірамід. Використовуючи формулу об'єму піраміди, знайдемо об'єм даного многогранника:

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot r + \frac{1}{3} S_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} S_n \cdot r =$$

$$= \frac{1}{3} r \cdot (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} S_{\text{повн}} \cdot r,$$

де $S_1$, $S_2$, $S_3$, ... — площі граней многогранника.

Теорему доведено. ■

Виявляється, що в будь-який тетраедр можна вписати сферу, і тільки одну. Але не кожний опуклий многогранник має цю властивість.

Розглядають також сфери, описані навколо многогранника.

### Означення

Сфера називається **описаною навколо многогранника**, якщо всі його вершини лежать на сфері.

У цьому випадку многогранник називається вписаним у сферу (рис. 160).

Також вважається, що відповідна куля описана навколо многогранника.

Навколо будь-якого тетраедра можна описати єдину сферу, але не кожний многогранник має відповідну властивість.

Многогранник та вписана (описана) сфера утворюють ***комбінацію геометричних тіл***.

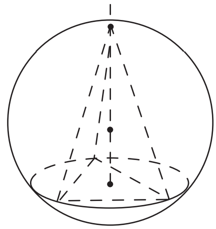


**Рис. 160.** Вписаний многогранник

## 12.4. Площа сфери

Застосуємо отриманий зв'язок для об'ємів та площ поверхонь описаних многогранників для виведення формули площі сфери.

Опишемо навколо сфери радіуса $R$ опуклий многогранник (рис. 161).

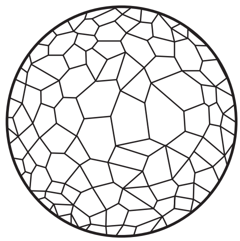


**Рис. 161.** До обґрунтування формули площі сфери. Описаний многогранник

Нехай $S'$ — площа повної поверхні даного многогранника, а будь-які дві точки однієї грані віддалені одна від одної менше ніж на $\varepsilon$. Тоді об'єм многогранника дорівнює $V=\frac{1}{3}S'\cdot R$. Розглянемо відстань від центра сфери $O$ до будь-якої вершини многогранника, наприклад $A_1$ (рис. 162).

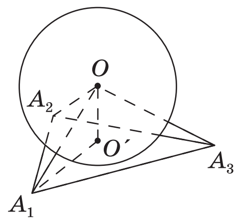
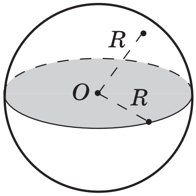



**Рис. 162.** До обґрунтування формули площі сфери

За нерівністю трикутника $OA_1 \leqslant OO' + O'A_1 < R+\varepsilon$, де $O'$ — точка дотику. Звідси випливає, що всі вершини даного многогранника лежать усередині кулі з центром $O$ та радіусом $R+\varepsilon$.

Отже, об'єм $V$ даного многогранника більший від об'єма кулі радіуса $R$ та менший за об'єм кулі радіуса $R+\varepsilon$, тобто $\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'\cdot R < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3$.

Звідси $4\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\varepsilon)^2 \cdot \left(1+\dfrac{\varepsilon}{R}\right)$.




$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4S_{\text{кр}}$

**Рис. 163.** Зв'язок площ сфери та великого круга

Якщо необмежено зменшувати розміри граней многогранника, тобто при $\varepsilon$, що прямує до нуля, отримаємо, що ліва та права частини останньої нерівності прямують до $4\pi R^2$, а многокутник усе щільніше прилягатиме до сфери. Тому отриману величину для границі $S'$ приймають за площу сфери.

Отже, **площа сфери радіуса $R$ обчислюється за формулою $S = 4\pi R^2$.**

Зауважимо, що доведена формула означає те, що площа сфери дорівнює чотирьом площам її великого круга (рис. 163).

Виходячи з аналогічних міркувань, можна отримати **формулу для площі сферичної частини кульового сегмента з висотою $H$:**

$$S_{\text{сф. ч}} = 2\pi RH.$$

Виявляється, що така саме формула справджується і **для площі сферичної поверхні кульового шару (поясу):**

$$S_{\text{сф. ч}} = 2\pi RH,$$

**де $H$ — висота шару (поясу).**

# Запитання і задачі

## Обговорюємо теорію

**574.**° Чи може розгортка бічної поверхні циліндра бути квадратом?

**575.** Чи може розгортка бічної поверхні конуса бути кругом?

**576.**° Як зміниться площа поверхні кулі, якщо об'єм кулі збільшиться в 27 разів?

**577.** Чи існує неопуклий многогранник, вписаний у сферу?

## Моделюємо

**578.** З цупкого паперу зробіть круг і розріжте його на два сектори, площі яких відносяться як $1:2$. Використовуючи дані сектори, зробіть два конуси. Знайдіть відношення площ повних поверхонь одержаних конусів.

**579.** З цупкого паперу зробіть два однакові прямокутники, сторони яких відносяться як $1:2$. Використовуючи дані прямокутники, склейте два різні циліндри. Знайдіть відношення площ повних поверхонь одержаних циліндрів.

**580.** Виміряйте діаметр волейбольного м'яча та знайдіть площу його поверхні. Використовуючи отриманий результат, знайдіть площу одного шкіряного шматка поверхні м'яча.

## Розв'язуємо задачі

### Рівень А

**581.°** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні циліндра з радіусом 3 см і висотою 5 см;

б) повної поверхні конуса з діаметром 6 см і твірною 5 см;

в) повної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною $a$;

г) бічної поверхні конуса, осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник із гіпотенузою $c$.

**582.** Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть бічну поверхню даного тіла обертання.

**583.** Кут між висотою і твірною конуса становить 30°. Знайдіть повну поверхню конуса, якщо твірна дорівнює 14 см.

**584.** Твірна зрізаного конуса дорівнює 2 см і нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть повну поверхню даного конуса, якщо його висота дорівнює радіусу меншої основи.

**585.** Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція з висотою 3 см і основами 12 см і 20 см. Знайдіть бічну поверхню зрізаного конуса.

**586.°** Знайдіть площу поверхні кулі, якщо:
а) її радіус дорівнює 2 см;
б) довжина її великого кола дорівнює $6\pi$ см.

**587.** Земна суша становить близько 29 % земної поверхні. У скільки разів площа земної суші більша за поверхню Місяця, якщо діаметр Землі приблизно дорівнює 13 000 км, а діаметр Місяця — 3500 км?

**588.°** Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює $288\pi$ см$^3$.

## Рівень Б

**589.** Площі бічної і повної поверхонь циліндра відносяться як $2:3$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра.

**590.** Кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площею основи дорівнює $\gamma$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо діагональ дорівнює $d$.

**591.** Намет, який має форму конуса з висотою 4,5 м і діаметром основи 6 м, покрито тканиною. Скільки квадратних метрів тканини було використано?

**592.** Дах підвалу має форму половини циліндра завдовжки 8 м, з діаметром основи 6 м, розрізаного вздовж осі. Знайдіть повну площу даху.

**593.** Вхід до магазину треба прикрасити декоративною спорудою у формі конуса з діаметром основи 1 м і висотою 60 см. Скільки листів заліза розміром $1{,}5 \times 1{,}2$ м потрібно використати?

**594.** З листа заліза було виготовлено цеберко у формі конуса з діаметром основи 60 см і висотою 40 см. Припуск на шов становив 0,8 см. Якого розміру лист заліза було взято?

**595.** У циліндрі висота $h$ дорівнює радіусу основи $r$. Доведіть, що площа повної поверхні циліндра дорівнює площі круга з радіусом $h+r$.

**596.** Паралельно осі циліндра проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом $2\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо діагональ утвореного перерізу дорівнює $d$ і нахилена до площини основи під кутом $\beta$.

**597.** Цинкове відро має форму зрізаного конуса з діаметрами основ 41 см і 32 см та твірною 17 см. Скільки матеріалу (у м$^2$) було взято, якщо витрати на шви і відходи становили 15 %?

**598.** Довжина хорди нижньої основи циліндра, яку видно з центра цієї основи під кутом $2\alpha$, дорівнює $a$. Відрізок, що сполучає середину цієї хорди з центром верхньої основи, утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

**599.** Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом $\alpha$, а з вершини — під кутом $\beta$. Визначте бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює $m$.

**600.** Площа бічної поверхні конуса втричі більша від площі основи. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо діаметр основи дорівнює 4 см.

**601.** Відрізок, який сполучає центр основи конуса із серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом $\varphi$. Довжина цього відрізка дорівнює $d$. Знайдіть повну поверхню конуса.

**602.** У кулі по різні боки від центра проведено два паралельні перерізи на відстані 14 см один від одного. Площі перерізів дорівнюють $64\pi$ см$^2$ і $36\pi$ см$^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.

**603.** Радіус кулі дорівнює $R$, а радіус її перерізу площиною — $r$. Знайдіть площу повної поверхні меншого кульового сегмента.

**604.** На якій відстані від центра кулі радіуса 6 см має перебувати точкове джерело світла, щоб ним освітлювалася третина поверхні кулі?

**605.** Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 10 см і 12 см, а його висота — 11 см. Знайдіть площу сферичної поверхні кульового поясу, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені по різні боки від центра кулі.

**606.** Радіус кулі дорівнює $R$, а радіус її перерізу площиною — $r$. Знайдіть площу сферичної частини поверхні більшого кульового сегмента.

## Рівень В

**607.** Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $h$, а плоский кут при вершині — $\alpha$. Знайдіть площу вписаної сфери.

**608.** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює $H$, а плоский кут при вершині — $\beta$. Знайдіть площу поверхні описаної кулі.

**609.** Для фарбування цистерни циліндричної форми завдовжки 30 м і діаметром 10 м було застосовано фарбопульт (фарборозпилювач) циліндричної форми висотою 70 см і діаметром 30 см. Скільки разів потрібно заправити фарбопульт, якщо витрати фарби становлять 0,3 л на 1 м$^2$ поверхні, що фарбується? Дізнайтеся з мережі Інтернет про галузі застосування фарбопультів. Ознайомтеся зі схемою їх будови.

**610.** В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, сторона основи якого дорівнює $a$ і кут при основі $\alpha$. Усі бічні грані нахилені до основи під кутом $\beta$. Знайдіть площу поверхні вписаної кулі.

**611.** У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює $d$. Знайдіть повну поверхню вписаного в піраміду конуса, твірна якого нахилена до площини основи під кутом $\varphi$.

**612.** У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює $m$. Знайдіть повну поверхню описаного навколо піраміди конуса, твірна якого утворює з висотою кут $\alpha$.

**613.** Циліндр вписано в пряму призму, в основі якої лежить ромб з гострим кутом $\alpha$. Більша діагональ призми дорівнює $d$, а менша — нахилена до площини основи під кутом $\varphi$. Знайдіть бічну поверхню циліндра.

**614.** Циліндр описано навколо прямокутного паралелепіпеда, більша сторона основи якого дорівнює $a$. Діагональ паралелепіпеда утворює з основою кут $\alpha$, а з більшою бічною гранню — кут $\varphi$. Знайдіть повну поверхню циліндра.

**615.** Навколо сфери площею $S$ описано пряму трикутну призму, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник із кутом $\alpha$ при вершині. Обчисліть об'єм цієї призми.

**616.** Навколо кулі з площею поверхні $S$ описано пряму чотирикутну призму, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з меншою основою $a$. Обчисліть об'єм цієї призми.

**617.** Колодязь циліндричної форми діаметром 135 см і глибиною 3 м 80 см було вирішено обкласти зсередини цеглою. Розміри цеглини 25 см $\times$ 12 см $\times$ 6,5 см. Скільки цеглин потрібно для виконання роботи, якщо вважати, що жодна цеглина не розіб'ється?

## Тестове завдання для самоперевірки № 3

**1.** Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 2 дм, 1 м.

**А** 6 см$^3$ **Б** 60 см$^3$ **В** 600 см$^3$ **Г** 6000 см$^3$

**2.** Твірна конуса дорівнює 5 см, а діаметр основи — 8 см. Знайдіть об'єм конуса.

**А** $48\pi$ см$^3$ **Б** $16\pi$ см$^3$ **В** $20\pi$ см$^3$ **Г** $40\pi$ см$^3$

**3.** Площа поверхні куба дорівнює 6 см$^2$. Знайдіть його об'єм.

**А** 1 см$^3$ **Б** 2 см$^3$ **В** 1,5 см$^3$ **Г** 3 см$^3$

**4.** Висота циліндра дорівнює діаметру основи $d$. Знайдіть об'єм циліндра.

**А** $\frac{d^3}{4}$ **Б** $\pi d^3$ **В** $\pi d^2$ **Г** $\frac{\pi d^3}{4}$

**5.** Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, площа найбільшого діагонального перерізу якої дорівнює 36 см$^2$, а висота вдвічі менша від ребра основи.

**А** $27\sqrt{3}$ см$^3$ **В** $168\sqrt{3}$ см$^3$

**Б** $162\sqrt{3}$ см$^3$ **Г** $81\sqrt{3}$ см$^3$

**6.** Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює $4{,}5\pi$ см$^3$.

**А** 9 см$^2$ **Б** $90\pi$ см$^2$ **В** $9\pi$ см$^2$ **Г** 90 см$^2$

**7.** Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

**А** 18 см$^2$ **Б** $18\sqrt{3}\pi$ см$^2$ **В** $36\pi$ см$^2$ **Г** $18\pi$ см$^2$

**8.** Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 64 см$^2$, а площа бічної поверхні — 80 см$^2$. Знайдіть об’єм піраміди.

**А** 192 см$^3$ **Б** 64 см$^3$ **В** 144 см$^3$ **Г** 16 см$^3$

**9.** В основі прямої призми лежить ромб із гострим кутом 60°. Менша діагональ призми дорівнює 12 см і нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть об’єм призми.

**А** $216\sqrt{6}$ см$^3$ **В** $216\sqrt{3}$ см$^3$

**Б** $216\sqrt{2}$ см$^3$ **Г** $144\sqrt{6}$ см$^3$

**10.** Знайдіть об’єм правильного тетраедра з ребром $a$.

**А** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **Б** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **В** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **Г** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

**11.** Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Площа бічної поверхні конуса дорівнює площі поверхні деякої кулі. Знайдіть відношення їхніх об’ємів.

**А** $1:2$ **Б** $\sqrt{2}:\sqrt[4]{4}$ **В** $\sqrt{2}:\sqrt[4]{2}$ **Г** $1:\sqrt[4]{2}$

**12.** В основі піраміди лежить трапеція, основи якої дорівнюють 12 см і 16 см, а одна з бічних сторін — 13 см. Висота піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть об’єм піраміди, якщо всі грані нахилені до основи під однаковим кутом.

**А** 1008 см$^2$ **Б** 672 см$^2$ **В** 336 см$^2$ **Г** 364 см$^2$

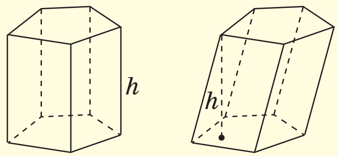
## Онлайн-тестування № 3

## Теми повідомлень, рефератів, навчальних проектів

# Підсумки розділу III

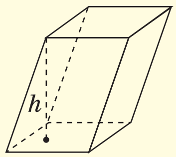
## ФОРМУЛИ ОБ'ЄМІВ І ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

### Призма



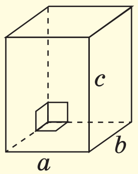

$$V = S_{осн} \cdot h$$

### Паралелепіпед



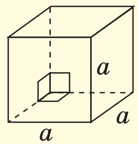

$$V = S_{осн} \cdot h$$

### Прямокутний паралелепіпед



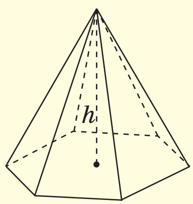

$$V = abc$$

### Куб



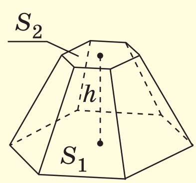

$$V = a^3$$

### Піраміда



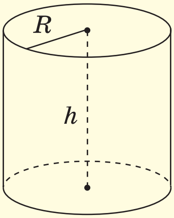

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$

### Зрізана піраміда




$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$$

**Циліндр**

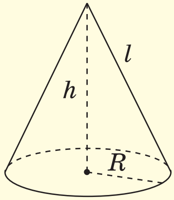



$$V = \pi R^2 h$$

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi R h$$

$$S_{\text{повн}} = 2\pi R (R + h)$$

**Конус**

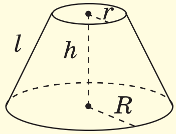



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$S_{\text{бічн}} = \pi R l$$

$$S_{\text{повн}} = \pi R (R + l)$$

**Зрізаний конус**

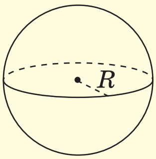



$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(r^2 + R^2 + rR\right)$$

$$S_{\text{бічн}} = \pi (R + r) l$$

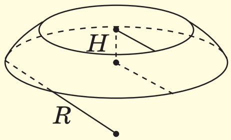
$$S_{\text{повн}} = \pi (R + r) l + \pi \left(R^2 + r^2\right)$$

**Куля та сфера**



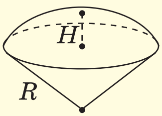

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad S = 4\pi R^2$$

**Кульовий шар (пояс)**



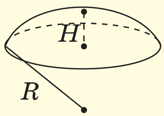

$$S_{\text{сф. ч}} = 2\pi R H$$

**Кульовий сектор**




$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

**Кульовий сегмент**




$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) \quad S_{\text{сф. ч}} = 2\pi R H$$

## Контрольні запитання до розділу III

1. Сформулюйте аксіоми об’єму для многогранників.
2. Сформулюйте та доведіть теореми про об’єм прямокутного паралелепіпеда та куба.
3. Сформулюйте та доведіть теорему про об’єм паралелепіпеда.
4. Доведіть формулу об’єму призми.
5. Дайте означення призми, вписаної в циліндр, та призми, описаної навколо нього.
6. Обґрунтуйте формулу об’єму циліндра.
7. Сформулюйте інтегральну формулу об’єму.
8. Сформулюйте принцип Кавальєрі.
9. Доведіть формулу об’єму піраміди.
10. Обґрунтуйте формулу об’єму зрізаної піраміди.
11. Дайте означення піраміди, вписаної в конус, та піраміди, описаної навколо нього.
12. Сформулюйте та доведіть теореми про об’єм конуса та об’єм зрізаного конуса.
13. Доведіть формулу об’єму кулі.
14. Дайте означення кульового сегмента та сектора, наведіть формули для обчислення їхніх об’ємів.
15. Сформулюйте правила для знаходження площ поверхонь конуса, зрізаного конуса та циліндра.
16. Дайте означення сфери, вписаної в многогранник, та сфери, описаної навколо нього.
17. Сформулюйте правила для знаходження площі сфери та сферичного сегмента.

## Додаткові задачі до розділу III

**618.** Бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють 1 см, 2 см і 3 см, а плоскі кути при вершині — $90^\circ$. Знайдіть об’єм піраміди.

**619.** Знайдіть об’єм правильного октаедра з ребром $a$.

**620.** Знайдіть об’єм і повну поверхню рівностороннього циліндра з радіусом $R$.

**621.** Знайдіть об’єм і повну поверхню рівностороннього конуса з радіусом $R$.

**622.** Висота піраміди поділена на чотири рівні частини. Через точки поділу проведені площини, паралельні основі. Знайдіть відношення об'ємів чотирьох отриманих частин піраміди.

**623.** Паралелограм обертається послідовно навколо своїх сторін $a$ і $b$. Знайдіть відношення об'ємів тіл обертання.

**624.** Радіус кулі дорівнює $R$. Визначте повну поверхню кульового сектора, якщо дуга в осьовому перерізі сектора дорівнює $90°$.

**625 (опорна).** ***Нехай тіло, яке отримане внаслідок обертання навколо осі Ox графіка функції*** $y=f(x)$***, розміщене між паралельними площинами*** $\alpha$ ***і*** $\beta$***, перпендикулярними до осі Ox. Тоді його об'єм можна обчислити за формулою*** $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$***, де a і b — абсциси координат точок перетину осі Ox з площинами*** $\alpha$ ***і*** $\beta$ ***відповідно (*** $a<b$ ***).*** Обґрунтуйте.

**626.** Доведіть, що об'єм кулі з діаметром $d$ дорівнює $\frac{\pi d^3}{6}$.

**627.** Якщо в перпендикулярний переріз призми можна вписати коло, то об'єм призми дорівнює півдобутку радіуса цього кола на площу бічної поверхні призми. Доведіть.

**628.** Мідний дріт завдовжки 25 м важить 100,7 г. Знайдіть діаметр дроту, якщо густина міді дорівнює 8,94 г/см$^3$.

**629.** Свинцева труба зі стінкою завтовшки 4 мм має внутрішній діаметр 13 см. Яка маса відрізка цієї труби завдовжки 25 м, якщо густина свинцю дорівнює 11,4 г/см$^3$?

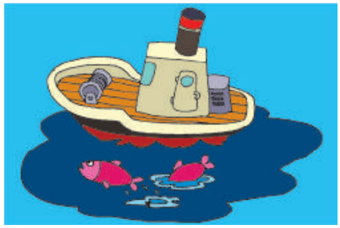
**630.** Стовпчик ртуті завдовжки 15,6 см у термометрі важить 5,2 г. Знайдіть площу поперечного перерізу стовпчика, якщо густина ртуті дорівнює 13,6 г/см$^3$.

**631.** Яка площа паперу завтовшки 0,1 мм, змотаного в рулон довжиною 85 см, якщо зовнішній радіус рулону становить 45 см, внутрішній — 2 см?

**632.** Насос, що подає воду до парового котла, має у своїй конструкції два однакові водяні циліндри діаметром 80 мм. Хід поршня насоса становить 150 мм. Яка продуктивність насоса протягом години, якщо кожний поршень робить 50 робочих ходів за хвилину? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію про схему будови насоса. Використайте її для розв'язування задачі.

**633.** Скільки метрів стального дроту діаметром 6 мм змотали в бухту масою 30 кг? Знайдіть у мережі Інтернет необхідну для розв'язання задачі інформацію.

**634.** Через несправність трубопроводу в море з судна вилився 1 $м^3$ нафти. Знайдіть площу круглої нафтової плями на поверхні моря, якщо товщина плівки становить 1 мм. Зробіть повідомлення про те, яку шкоду навколишньому середовищу щорічно завдає розлив нафти та нафтопродуктів. Як можна запобігти цьому?



**635.** На кухні ресторану чан, що має форму півсфери радіуса $R$, наповнений томатним соусом. Який об'єм рідини виллється з чану, якщо нахилити його на кут 30°?

**636.** Яблучний сік, налитий до краю в посудину конічної форми висотою 0,14 м із діаметром основи 0,18 м, перелили в іншу посудину, яка має форму циліндра з діаметром основи 0,2 м. Яким буде рівень соку в цій посудині?

**637.** Для підсипки під'їзних шляхів до будівельного майданчика було завезено гравій, який склали в купу у вигляді чотирикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 12 м і 4 м, а висота — 3 м. Скільки кубічних метрів гравію було завезено?

**638.** Зібрану картоплю насипали в купу конічної форми. Довжина кола основи купи дорівнює 14 м, твірна — 4 м. Скільки тонн картоплі зібрали? Маса 1 $м^3$ картоплі становить 850 кг.

**639.** Циліндрична димова труба діаметром 65 см має довжину 18 м. Скільки жерсті (у $м^2$) було використано для її виготовлення, якщо витрати на шви склали 10 % матеріалу?

**640.** Дах підвалу має форму половини циліндра завдовжки 6 м, з діаметром основи 5,8 м, розрізаного вздовж осі. Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати повну поверхню даху, якщо витрати фарби становлять 250 $г/м^2$?

**641.** Скільки квадратних метрів жерсті треба закупити для виготовлення водостічної труби завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо витрати на шви складають 10 % площі, які заплановано додати до розрахункової величини?

**642.** Чи вистачить 8500 м$^2$ ізоляційної плівки для двократного покриття нею відрізка газопроводу діаметром 1420 мм завдовжки 1 км?

**643.** Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи — 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з 15 000 м$^2$ жерсті, якщо 10 % матеріалу витрачається на шви та потрапляє у відходи?

**644.** Знайдіть геометричне місце точок — вершин усіх пірамід з об'ємом $V$, спільною основою яких є даний многокутник із площею $S$.

**645.** Якщо два циліндри рівновеликі, то площі їхніх бічних поверхонь обернено пропорційні радіусам даних циліндрів. Доведіть.

## Задачі підвищеної складності

**646.** У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює $a$, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $\alpha$. Через сторону основи проведено переріз, перпендикулярний до протилежного бічного ребра. Знайдіть об'єми частин піраміди.

**647.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а двогранний кут при бічному ребрі — $\varphi$. Знайдіть об'єм піраміди.

**648.** Повна поверхня конуса дорівнює $S$. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм конуса.

**649.** Доведіть, що серед усіх прямокутних паралелепіпедів із даною діагоналлю найбільший об'єм має куб.

**650.** Дано трикутну піраміду $PABC$. На променях $PA$, $PB$, $PC$ обрано точки $M$, $N$, $K$ відповідно таким чином, що $\frac{PM}{PA}=\lambda_1$, $\frac{PN}{PB}=\lambda_2$, $\frac{PK}{PC}=\lambda_3$. Доведіть, що $\frac{V_{PMNK}}{V_{PABC}}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

**651.** Доведіть, що об'єм тетраедра $PABC$ дорівнює $\frac{1}{6}d\cdot AB\cdot CP\cdot\sin\varphi$, де $d$ — відстань між прямими $AB$ та $CP$, $\varphi$ — кут між ними.

**652.** У трикутній піраміді всі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо довжини цих ребер дорівнюють $a$, $b$, $c$.

**653.** Доведіть, що об'єм кульового шару можна обчислити за формулою $V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi\left(r_1{}^2+r_2{}^2\right)h$, де $h$ — висота шару, $r_1$ та $r_2$ — радіуси його основ.

**654.** Площу повної поверхні кульового сектора можна обчислити за формулою $S_{\text{повн}}=\pi R\left(2H+\sqrt{2RH-H^2}\right)$, де $R$ — радіус кулі, $H$ — висота відповідного сегмента. Обґрунтуйте.

**655 (опорна).** ***Для будь-якої правильної піраміди існує рівно одна вписана куля та рівно одна описана куля. Центр вписаної кулі належить висоті, центр описаної — прямій, що містить висоту.*** Доведіть.

**656 (опорна).** ***Кулю можна вписати в пряму призму тоді й тільки тоді, коли в її основи можна вписати кола, а висота призми дорівнює діаметрам цих кіл. Кулю можна описати навколо прямої призми тоді й тільки тоді, коли навколо її основ можна описати кола. Центром вписаної (описаної) кулі є середина висоти призми, яка з'єднує центри вписаних (описаних) кіл її основ.*** Доведіть.

**657 (опорна).** ***У будь-яку піраміду з рівними двогранними кутами при основі можна вписати кулю й тільки одну. Її центр належить висоті піраміди. Навколо будь-якої піраміди з рівними бічними ребрами можна описати кулю й тільки одну. Її центр належить прямій, що містить висоту.*** Доведіть.

**658 (опорна).** ***Для будь-якого тетраедра існує рівно одна вписана куля й рівно одна описана куля.*** Доведіть.

**659.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $a$. Бічне ребро утворює з висотою кут $\alpha$. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в цю піраміду.

**660.** Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює $h$. Бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо цієї піраміди.

**661.** З точки $P$ поверхні кулі проведено три рівні хорди $PA$, $PB$ і $PC$, які утворюють кути $60°$ одна з одною. Знайдіть об'єм кулі, якщо відстань від точки $P$ до площини $ABC$ дорівнює $d$.

## Львівський національний університет

Львівський національний університет (ЛНУ) є одним із найстаріших у Східній Європі. Він був створений на основі колегіуму єзуїтів, заснованого аж у 1608 році! Пізніше цей навчальний заклад перетворювався на академію, ліцей, аж нарешті став класичним університетом. Одним із найвідоміших професорів університету був історик М. Грушевський, майбутній голова Центральної Ради УНР. У 1939 р. Львівський університет отримав ім'я свого колишнього студента, а надалі всесвітньо відомого українського поета Івана Франка.

У XVIII ст. сталися зміни в навчальному процесі університету, зумовлені розвитком природничих наук, — було створено кафедру математики, математично-фізичний кабінет, університетську астрономічну обсерваторію. Ще відтоді було закладено основи надзвичайно вагомого внеску львівських вчених до скарбниці математичної науки.

*Пам'ятник І. Франку навпроти центрального входу до Львівського університету*

У 20–30-ті рр. XX ст. Львів став справжньою математичною столицею Європи. У місті працювали всесвітньо відомі математики Гуго Штейнгауз, Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам. Та чи не найвідомішим із них став Стефан Банах — один із засновників та керівників Львівської математичної школи. Ще за років навчання в гімназії Стефан виділяв математику серед інших предметів. Проте в списку «особливо обдарованих» випускників гімназії Банаха не було. Його прізвище значилося в групі дітей із «звичайними здібностями». Після закінчення гімназії Стефан виїхав до Львова без фінансової підтримки і мав самостійно заробляти на навчання у Львівській політехніці. Згодом талановитий юнак перетворився на відомого вченого, професора Львівського університету, одного з творців нової математичної дисципліни — функціонального аналізу. Геніальному вченому навіть бракувало часу записувати й редагувати всі свої теореми; він видавав їх величезну кількість.

*Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка*

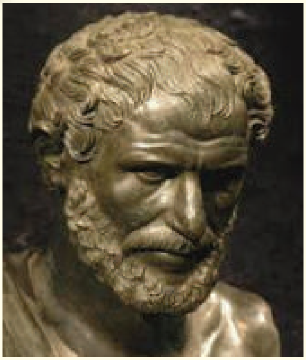
Банах побив усі рекорди за швидкістю, із якою отримував дедалі нові й нові результати, оскільки вирішення однієї проблеми призводило до виникнення наступної. Тому Банах часто не робив записів своїх наукових відкриттів, він лише усно інформував про них математичне товариство.

Згодом львівські математики уподобали для себе «Шкотську (шотландську) кав'ярню». Одного разу Стефан Банах просидів у ній зі своїм колегою 17 годин! Через якийсь час маленькі столики з мармуровим покриттям стали дуже зручним місцем для запису математичних формул. Природно, власник кафе не був задоволений подібним свавіллям. Ситуацію врятувала дружина Банаха. Вона придбала математикам великий зошит для записів, який потім став знаменитою «Шкотською книжкою». Часто за розв'язання певної проблеми львівські математики у той час пропонували різні жартівливі нагороди — келих пива, вечерю в ресторані, живого гусака. Власник кав'ярні був лояльним до постійних відвідувачів, немов відчуваючи — у веселій, на перший погляд хаотичній атмосфері твориться історія... За значущістю «Шкотську кав'ярню» для подальшого поступу української та світової математики, розвитку Львівського університету можна сміливо порівняти з Монмартром у Парижі для розвитку мистецтва.

Навіть зараз кращою рекомендацією для львівських учених, які виїжджають за кордон на наукові конференції чи викладацьку роботу, є слова: «Це учений з університету, у якому працював Стефан Банах...» І більше запитань не виникає.

## Історична довідка

Багато формул для обчислення об'ємів многогранників були відомі вже в Стародавньому Єгипті. У так званому Московському папірусі, створеному близько 4000 років тому, ймовірно, вперше в історії обчислюється об'єм зрізаної піраміди. Але чіткі доведення багатьох формул для об'ємів з'явилися пізніше, у працях давньогрецьких учених.

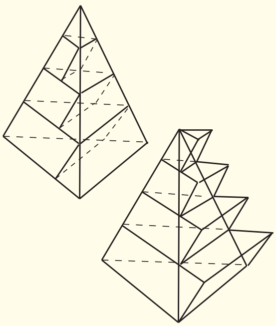


*Демокріт*

Так, доведення формул для об'ємів конуса й піраміди пов'язане з іменами Демокріта з Абдери (орієнт. 460–370 рр. до н. е.) та Євдокса Кнідського (орієнт. 408–355 рр. до н. е.). На підставі їхніх ідей видатний математик та механік Архімед (287–212 рр. до н. е.) обчислив об'єм кулі, знайшов формули для площ поверхонь циліндра, конуса, сфери.

*Бонавентура Кавальєрі*

Подальшого розвитку методи, запропоновані Архімедом, набули завдяки працям середньовічного італійського ченця й математика Бонавентури Кавальєрі (1598–1647). У своїй книзі «Геометрія неподільних» він сформулював принцип порівняння об'ємів, у якому використовуються площі перерізів. Ці міркування стали підґрунтям для інтегральних методів обчислення об'ємів, розроблених Ісааком Ньютоном (1642 (1643)–1727) та Готфрідом Вільгельмом фон Лейбніцем (1646–1716). У багатьох підручниках з геометрії об'єм піраміди знаходиться за допомогою «чортової драбини» — варіанта давньогрецького метода вичерпування, запропонованого французьким математиком Адрієном-Марі Лежандром (1752–1833).

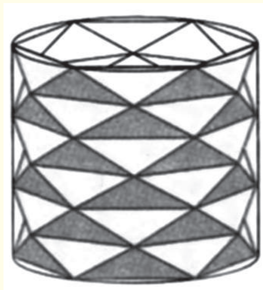


*Чортова драбина*

На II Міжнародному конгресі математиків, який відбувся у 1900 році в Парижі, Давид Гільберт сформулював, зокрема, таку проблему: чи правильно, що будь-які два рівновеликі многогранники є рівноскладеними? Уже через рік негативна відповідь на це запитання була обґрунтована учнем Гільберта Максом Деном (1878–1952). Інше доведення цього факту подав у 1903 році відомий геометр Веніамін Федорович Каган, який на початку XX століття вів плідну наукову й просвітницьку діяльність в Одесі. Зокрема, з праць Дена та Кагана випливає, що доведення формули об'єму піраміди неможливе без того чи іншого варіанта застосування границь.

*Г. Мінковський*

Значний внесок у розвиток теорії площ поверхонь зробили німецькі математики XIX століття. Так, у 1890 році Карл Герман Амандус Шварц (1843–1921) побудував приклад послідовності многогранних поверхонь, вписаних у бічну поверхню циліндра («чобіт Шварца»). Зменшення їхніх граней не призводить до наближення суми площ цих граней до площі бічної поверхні циліндра. Це стало поштовхом для створення видатним німецьким математиком і фізиком Германом Мінковським (1864–1909) сучасної теорії площ поверхонь, у якій останні пов'язуються з об'ємом шару навколо даної поверхні.



*Чобіт Шварца*

Зважаючи на величезний внесок Архімеда у розвиток математики, зокрема теорії об'ємів та площ поверхонь, саме його зображено на Філдсівській медалі — найпочеснішій у світі нагороді для молодих математиків. У 1990 році нею було нагороджено Володимира Дрінфельда (нар. у 1954 р.), який навчався і певний час працював у Харкові. Отже, саме юні таланти, які добре вивчили геометрію в школі, стають у подальшому всесвітньо відомими вченими.

*Філдсівська медаль*

## Готуємося до ЗНО

**662.** Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження.

Чотирикутник завжди є паралелограмом, якщо...

А його діагоналі рівні.

Б дві протилежні сторони в ньому рівні.

В сума кожної пари сусідніх кутів дорівнює розгорнутому куту.

Г діагональ ділить його на два рівні трикутники.

**663.** У трикутнику $ABC$ $(\angle C = 90°)$ $CH$ — висота. Серед наведених рівностей виберіть неправильну.

А $CB = \sqrt{BH \cdot AB}$ В $CH^2 = AH \cdot BH$

Б $AC = AH \cdot AB$ Г $CH \cdot AB = AC \cdot BC$

**664.** У трикутнику $ABC$ знайдіть сторону $AB$, якщо $BC = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 120°$, $\angle C = 45°$.

А $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см Б 6 см В $3\sqrt{6}$ см Г $2\sqrt{3}$ см

**665.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $a$.

А $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ Б $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ В $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ Г $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**666.** Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1;-2)$, $B(-2;1)$, $C(4;3)$, $D(5;0)$.

А Трапеція В Ромб

Б Прямокутник Г Квадрат

**667.** Ребро куба дорівнює 2 см. Знайдіть діагональ цього куба.

А 4 см Б $2\sqrt{3}$ см В $2\sqrt{2}$ см Г 8 см

**668.** Скільки ребер має піраміда, в основі якої лежить вісімнадцятикутник?

А 18 Б 24 В 27 Г 36

**669.** Прямокутний паралелепіпед має виміри 1 см, 2 см, 3 см. Знайдіть площу його повної поверхні.

А 22 см$^2$ Б 6 см$^3$ В 11 см$^2$ Г $20\sqrt{3}$ см$^2$

**670.** В осьовому перерізі конуса утворився трикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 6 см. Знайдіть об'єм конуса.

А $12\pi$ см$^3$ Б $15\pi$ см$^3$ В $36\pi$ см$^3$ Г $150\pi$ см$^3$

**671.** Лампочка висить над столом на відстані 10 см від його поверхні (рис. 164). Олівець завдовжки 10 см стоїть на столі на відстані 10 см від точки, над якою висить лампочка. Лампочку починають підіймати вертикально вгору. Який із графіків показує залежність довжини $y$ (в см) тіні олівця від висоти $x$ (в см) перебування лампочки над поверхнею стола?

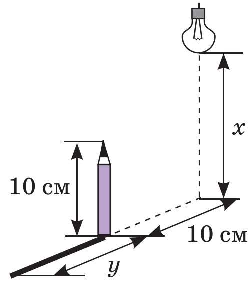
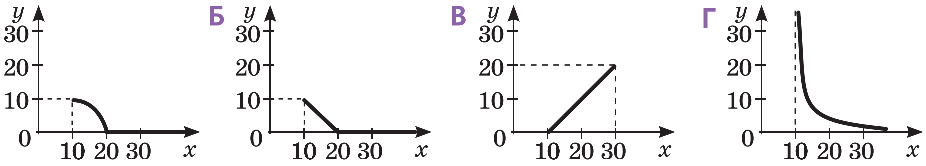



**Рис. 164**

А Б В Г




**672.** Оберіть правильне твердження:

**А** Через дану точку можна завжди провести єдину пряму, паралельну даній площині.

**Б** Через дану точку можна завжди провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини.

**В** Через дану точку можна завжди провести єдину площину, перпендикулярну до даної площини.

**Г** Через дану точку можна завжди провести єдину площину, паралельну даній прямій.

**673.** На рис. 165 $PC$ — перпендикуляр, проведений із точки $P$ до площини $ABC$. Користуючись рисунком, установіть відповідність між кутами (1–4) та їх характеристиками (А–Д).

**1** $\angle PKC$

**2** $\angle CKB = 90°$

**3** $\angle PBC$

**4** $\angle KPC$

**А** Кут між мимобіжними прямими $AB$ і $PC$

**Б** Кут між прямою $PB$ і площиною $ABC$

**В** Кут між прямою $PC$ і площиною $APB$

**Г** Кут між прямою $KP$ і площиною $PBC$

**Д** Кут між площинами $ABC$ і $APB$

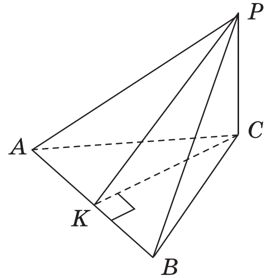



**Рис. 165**

**674.** На рис. 166 точка $O$ — центр кола, пряма $AC$ — дотична до кола, $AB = OB = 4$ см.

а) Доведіть, що трикутник $ABC$ рівнобедрений.

б) Знайдіть довжину відрізка $OC$.

**675.** На рис. 167 $ABCD$ — паралелограм.

а) Доведіть рівність трикутників $AOM$ і $CON$.

б) Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $\angle ABO = 60°$, $\angle MDO = 15°$.

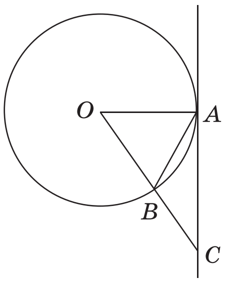



**Рис. 166**

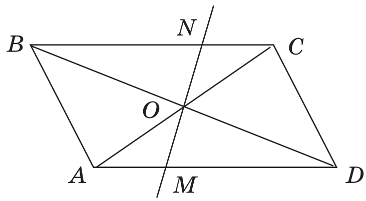



**Рис. 167**

**676.** Діагональ прямокутника $ABCD$ утворює з його стороною кут 45°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо $AB = 4$ см. Чи є цей прямокутник описаним; вписаним?

**677.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ кут $A$ вдвічі менший, ніж кут $B$, основа $AD$ втричі більша за основу $BC$. Середня лінія трапеції дорівнює 6 см.

а) Знайдіть периметр трапеції.

б) Чи є ця трапеція описаною; вписаною?

**678.** У трапеції $ABCD$ основи $AD$ і $BC$ дорівнюють 15 см і 10 см відповідно, $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см.

а) Знайдіть периметр трапеції.

б) Чи є дана трапеція описаною; вписаною?

**679.** Пряма, паралельна основі $AC$ рівнобедреного трикутника $ABC$, перетинає його сторони $AB$ і $BC$ в точках $D$ і $E$ відповідно.

а) Доведіть подібність трикутників $ABC$ і $DBE$.

б) Знайдіть довжину відрізка $DE$, якщо $AD = 10$ см, $DB = 15$ см, а медіана $BM$ трикутника $ABC$ дорівнює 20 см.

**680.** Із точки $D$ — середини катета $AB$ прямокутного трикутника $ABC$ — проведено перпендикуляр $DE$ до гіпотенузи $AC$.

а) Доведіть подібність трикутників $ABC$ і $AED$.

б) Знайдіть периметр трикутника $ABC$, якщо $AE = 8$ см, $DE = 6$ см.

**681.** Одна з діагоналей ромба більша за іншу на 14 см. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 13 см.

**682.** Площа рівнобічної трапеції дорівнює 24 см$^2$, а її висота 3 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см.

**683.** Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють $6\sqrt{3}$ см і 10 см, а висота, проведена з вершини, утворює з однією з них кут 30°.

**684.** Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 5 см і 8 см, а площа $10\sqrt{3}$ см$^2$. Знайдіть периметр трикутника.

**685.** Знайдіть найбільший кут і площу трикутника зі сторонами $6\sqrt{2}$ см, 2 см і 10 см.

**686.** Площа квадрата, описаного навколо кола, дорівнює 48 см$^2$. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в це коло.

**687.** Знайдіть площу правильного шестикутника, вписаного в коло завдовжки $4\pi$ см.

**688.** Площа круга дорівнює $9\pi$ см$^2$. Навколо круга описано рівносторонній трикутник. Знайдіть його висоту.

**689.** Знайдіть висоту, проведену до бічної сторони рівнобедреного трикутника з основою 30 см і бічною стороною 25 см. Розв'яжіть задачу двома способами.

**690.** Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 5 см, 16 см і 19 см.

**691.** Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см.

**692.** До бічних сторін $AB$ і $BC$ рівнобедреного трикутника $ABC$ проведено висоти $AM$ і $CN$.

а) Доведіть рівність трикутників $AMB$ і $CNB$.

б) Відрізок $BD$ — медіана трикутника $ABC$. Доведіть подібність трикутників $ABD$ і $ACN$.

в) Доведіть, що $MN \parallel AC$.

г) Знайдіть площу трикутника $ABC$, якщо $\angle A = 30°$, $AB = 10$ см.

**693.** Відрізки $BM$ і $DN$ — висоти паралелограма $ABCD$ (точки $M$ і $N$ належать сторонам $AD$ і $AB$ відповідно).

а) Доведіть подібність трикутників $ABM$ і $ADN$.

б) Доведіть, що коли $BM = DN$, то $ABCD$ — ромб.

в) Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $AB = AD = BD$, $BM = \sqrt{3}$ см.

**694.** Через середину $M$ катета $AB$ прямокутного трикутника $ABC$ проведено пряму, яка паралельна катету $BC$ і перетинає гіпотенузу $AC$ в точці $N$.

а) Доведіть, що $AN = NC = BN$.

б) Знайдіть площу трикутника $AMN$, якщо $BN = 8$ см, $\angle NBC = 60°$.

**695.** У прямокутнику $ABCD$ через точку перетину діагоналей $O$ проведено пряму, яка паралельна перпендикуляру $AH$ до діагоналі $BD$ і перетинає сторону $AD$ в точці $M$; $BO = 25$ см, $HO = 7$ см.

а) Доведіть, що $OM : AH = 25 : 32$.

б) Знайдіть площу прямокутника.

**696.** Бісектриса $BD$ прямокутного трикутника $ABC$ ділить гіпотенузу $AC$ на відрізки $AD = 15$ см і $DC = 20$ см.

а) Знайдіть площу трикутника $ABC$.

б) Знайдіть відношення площ трикутників $ABD$ і $CBD$.

**697.** У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 35 см і 21 см. Знайдіть площу трикутника.

**698.** Діагоналі паралелограма завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°. Знайдіть сторони і площу паралелограма.

**699.** Знайдіть периметр паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 11 см і 13 см, а одна зі сторін 9 см.

**700.** У трикутнику зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см знайдіть найбільшу висоту. Розв'яжіть задачу двома способами.

**701.** Дві сторони тупокутного трикутника дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см, а радіус описаного кола 4 см.

а) Знайдіть кути трикутника.

б) Знайдіть градусну міру найменшої з дуг, які стягують сторони трикутника в описаному колі.

**702.** У вписаному трикутнику $ABC$ $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. Знайдіть площу трикутника і площу описаного круга, якщо $\cup ABC = 240°$.

**703.** Знайдіть площу трикутника зі стороною $a$ і прилеглими до неї кутами $\alpha$ і $\beta$.

**704.** Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якому кут при основі дорівнює $\alpha$, а бісектриса, проведена з вершини цього кута, дорівнює $l$.

**705.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 20 см, а бічні сторони 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції. Розв'яжіть задачу двома способами.

**706.** Доведіть двома способами, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює півсумі основ.

**707.** Основи трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а бічні сторони 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

**708.** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить більшу сторону прямокутника на частини, одна з яких дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

**709.** У квадраті $ABCD$ точки $K$ і $M$ — середини сторін $AB$ і $BC$ відповідно (рис. 168). Доведіть, що $KC \perp DM$.

**710.** Навколо квадрата з площею $S$ описане коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин квадрата дорівнює $4S$.

**711.** У трикутник $ABC$ вписано ромб $BDEF$ (рис. 169). Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 30$, $BC = 15$.

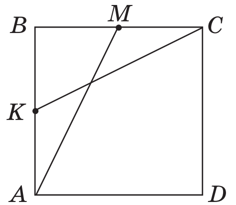



**Рис. 168**

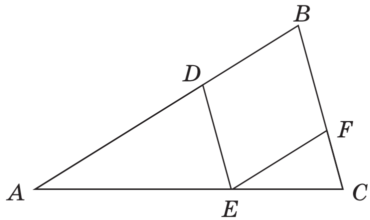



**Рис. 169**

**712.** Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 21 см, а довжина вписаного кола — $24\pi$ см. Знайдіть периметр і площу трапеції.

**713.** Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.

**714.** Знайдіть кути трикутника $ABC$, якщо висота $CH$ і медіана $CM$ ділять кут $C$ на три рівні частини. Розв'яжіть задачу двома способами.

**715.** Діагональ $AC$ чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо чотирикутника. Доведіть двома способами, що проекції протилежних сторін на діагональ $BD$ рівні.

**716.** У порожню циліндричну склянку з радіусом основи 6 см налили сік. У нього повністю занурили ємність у вигляді кулі радіуса 3 см з льодом для охолодження соку. На скільки сантиметрів піднявся рівень соку в склянці (відомо, що сік через край не перелився)?

**717.** Об'єм правильного тетраедра дорівнює $18\sqrt{2}$ см$^3$. Знайдіть ребро тетраедра.

**718.** Об'єм кулі дорівнює $288\pi$ см$^3$. Знайдіть площу сфери, яка обмежує цю кулю.

**719.** Координати кінців відрізка $(1;2;3)$ і $(3;2;1)$. Знайдіть відстань від точки з координатами $(8;-6;32)$ до середини заданого відрізка.

**720.** Знайдіть рівняння сфери з центром у точці $O(1;-3;-2)$, якщо ця сфера проходить через точку $A(1;1;1)$.

**721.** В основі трикутної піраміди $PABC$ з рівними бічними ребрами лежить прямокутний трикутник $ABC$ з катетами $AC=12$ см, $BC=2\sqrt{14}$ см. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди, якщо висота $PO$ піраміди дорівнює половині ребра $AB$.

**722.** Обчисліть об'єм прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 170), якщо $AD$ — медіана трикутника $ABC$, точка $K$ — середина ребра $BB_1$, а об'єм многогранника $KADB$ дорівнює 8 см$^3$.

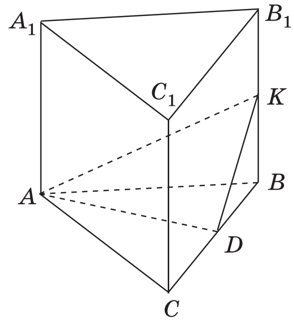


**Рис. 170**

**723.** Через вершину $C$ прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр $MC$ до площини прямокутника. Кут між прямою $MA$ і площиною прямокутника дорівнює $45°$, $AD=2$ см, $AB=2\sqrt{2}$ см. Знайдіть градусну міру кута між площинами $ABC$ і $ABM$.

**724.** Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри дна якого 5 м і 20 м, а глибина дорівнює 3 м. Обчисліть час, за який басейн наповниться водою на 2,8 м, якщо швидкість подачі води становить 7 м$^3$/хв.

**725.** Об'єм правильної чотирикутної піраміди $PABCD$ з вершиною $P$ дорівнює $V$ м$^3$. Точка $K$ — середина бічного ребра $PC$. Знайдіть об'єм піраміди $KBCD$.

**726.** Циліндр вписано в куб із ребром $a$. Знайдіть площу повної поверхні цього циліндра.

**727.** Через вершину конуса з радіусом основи 4 см проведено переріз під кутом $60°$ до площини основи. Обчисліть площу перерізу, якщо площина перерізу віддалена від основи висоти конуса на 3 см.

**728.** На рис. 171 зображено ємність, у яку налито одну склянку води. Обчисліть, на яку кількість повних склянок води розрахована ця ємність.

**729.** Із дерев'яної циліндричної заготівки, осьовим перерізом якої є квадрат, виточили більярдну кулю найбільшого об'єму. Визначте, скільки відсотків об'єму заготівки пішло у відходи.

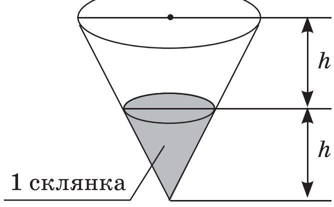


**Рис. 171**

**730.** В основі прямої призми лежить ромб зі стороною 12 см та гострим кутом $60°$. Через меншу діагональ однієї основи і вершину гострого кута протилежної основи проведено переріз, який утворює з площиною основи призми кут $30°$. Знайдіть площу цього перерізу.

**731.** Вершини правильного трикутника розміщені на поверхні кулі радіуса $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо центр кулі розташований на відстані $3\sqrt{3}$ см від сторін трикутника.

**732.** У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ із точки $O$, яка є основою висоти $SO$, до бічного ребра $SA$ проведено перпендикуляр $OM$ завдовжки $3\sqrt{6}$ см. Двогранний кут при бічному ребрі дорівнює $120°$. Знайдіть об'єм піраміди $SABCD$.

**733.** Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ з гострим кутом $A$. Ребро $SB$ перпендикулярне до прямих $AB$ і $BC$. Проекцією ребра $SD$ на площину основи піраміди є відрізок завдовжки 10 см, який утворює зі стороною $AD$ кут $30°$. Знайдіть тангенс кута між площинами $SAD$ і $ABC$, якщо $SD = 15$ см.

**734.** Об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, проведеної до його основи, дорівнює $320\pi$ см$^3$. Обчисліть довжину бічної сторони цього трикутника, якщо його основа дорівнює 16 см.

**735.** У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою $ABC$ бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки $K$ і $P$ — середини ребер $AC$ і $BC$ відповідно. Через пряму $KP$ паралельно ребру $SC$ проведено площину $\alpha$. Знайдіть косинус кута між площинами $ABC$ і $\alpha$.

**736.** Радіус основи конуса дорівнює $R$, твірна нахилена до основи під кутом $\alpha$. Через вершину конуса проведено переріз у формі трикутника під кутом $\varphi$ до висоти. Знайдіть площу перерізу.

**737.** Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$ см, а периметр основи 50 см. Визначте об'єм цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4 см.

**738.** Основою правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник $ABC$. Відстань від вершини $A$ до грані $BB_1C_1C$ дорівнює $d$. Точка $K$ — середина ребра $BC$. Площина, яка проходить через точки $A$, $K$ і $B_1$, утворює з площиною основи призми кут $\alpha$. Визначте об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$.

**739.** В основі піраміди лежить рівносторонній трикутник зі стороною $a$ см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і також є рівностороннім трикутником. Навколо піраміди описана куля. Знайдіть її радіус.

**740.** Рівносторонній трикутник зі стороною $\sqrt[3]{\dfrac{7}{\pi}}$ см обертається навколо однієї зі сторін. Знайдіть об'єм тіла обертання.

**741.** Дано кулю радіуса $\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ см. Через кінець радіуса, що належить поверхні кулі, проведено площину під кутом $60°$ до цього радіуса. Знайдіть площу отриманого перерізу.

**742.** Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $\dfrac{6}{\pi}$ см$^2$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

**743.** Висоту конуса розбито на три рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини, які поділяють конус на три частини. Знайдіть об'єм середнього зрізаного конуса, якщо об'єм заданого конуса дорівнює 27 см$^3$.

**744.** Дано циліндр і кулю. Радіуси основи циліндра і великого круга кулі однакові. Площа повної поверхні циліндра відноситься до площі поверхні кулі як $m:n$. Знайдіть відношення їх об'ємів.

**745.** Знайдіть об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, якщо $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 5$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 20$.

# Відповіді

## Розділ I

**12**. а) $60°$; б) 7 см. **13**. 3 см. **14**. У 1,5 разу. **15**. 12 см. **17**. Три. **18**. 8 см. **19**. $9\sqrt{3}$ см$^2$. **20**. а) $16\sqrt{3}$ см$^2$; б) 62 см$^2$. **21**. 5 см. **22**. $120°$. **24**. $60°$. **25**. 13 см. **27**. а) $(20°;\ 140°)$; б) $(10°;\ 170°)$. **28**. а) 7 см; б) 35 см. **257**. $\arccos\frac{1}{3}$. **29**. Два ребра по 6 см і чотири ребра по 5 см; 48 см$^2$. **33**. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **34**. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **35**. $\angle AOB = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$, $\angle AOC = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\sin\beta)$. **36**. $60°$. **37**. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **38**. *Вказівка*. Нехай шуканий многогранник має $n$ граней. Якщо всі його грані — трикутники, то він має $\frac{3n}{2}$ ребер, але 7 не кратно 3. Якщо ж хоча б одна з граней — не трикутник, то кількість ребер не менша за 8. **54**. $6\sqrt{2}$ см. **55**. $4\sqrt{3}$ см$^2$. **56**. 5 см. **57**. $90°$, $60°$, $30°$. **58**. 12 см і $6\sqrt{5}$ см. **59**. а) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4ab+2a^2$; в) $6ab+3\sqrt{3}a^2$. **60**. $16\sqrt{3}$ см$^2$. **61**. $\sqrt{66}$ см. **62**. 90 м$^2$. **63**. 70 м$^2$. **64**. 296 см$^2$. **65**. $6a^2\sin\alpha$. **66**. 5 см. **69**. 4 см, 7 см. **70**. $d^2\sin\alpha\sin\beta$. **71**. $45°$. **72**. $n(n-3)$. **75**. 2 см. **76**. 26 см. **77**. 140 см$^2$. **78**. 1248 см$^2$. **79**. 8 см. **80**. $(32+16\sqrt{3})$ см$^2$. **81**. 48 см$^2$. **82**. 112 см$^2$. **83**. 270 см$^2$. **86**. а) 21 см; б) 9 см; в) 13 см. **87**. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **88**. $4d^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **89**. $4\sqrt{2}Q\operatorname{ctg}\alpha$. **90**. 17 см. *Вказівка*. Визначте шукану відстань за розгорткою поверхні призми. **91**. $\frac{4l^2\sin\beta}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\beta}$. **92**. $60°$. **93**. $\frac{\sqrt{2}S\operatorname{ctg}\alpha}{8}$. **94**. $2a^2(1+\sqrt{3})$. **95**. 192 см$^2$. **102**. *Вказівка*. Скористайтеся властивостями многогранних кутів. **109**. $9\sqrt{3}$ см$^2$. **110**. 13 см і 15 см. **111**. 45 см$^2$. **112**. а) 10 см; б) 15 см; в) 3 см. **113**. а) 4 см; б) 36 см$^2$. **114**. а) 4 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 32 см$^2$. **115**. а) 6 см; б) $\sqrt{5}$ см. **116**. а) 36 см$^2$; б) 80 см$^2$; в) 360 см$^2$. **117**. $\approx 145$ м. **118**. 96 см$^2$. **119**. 48 см$^2$. **120**. $\frac{12\sqrt{3}m^2}{\cos\beta}$. **121**. $4l^2\operatorname{ctg}\beta$. **122**. 5 м і $\sqrt{58}$ м. **123**. 24 см. **127**. а) $\sqrt{6}$ см; б) $\sqrt{5}$ см; в) $2R\sin^2\alpha$. 357. а) $\sqrt{2}$ см; б) 10 см. **129**. 27 см$^2$. **130**. $18\sqrt{3}$ см$^2$.

**131.** $\frac{3\sqrt{3}m^2}{\cos^2\beta}\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)$. **132.** $16d^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)$. **133.** $60°$. **134.** 8 см$^2$. **135.** 3, 4, 5. **136.** а) $\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos\gamma}}$; б) $\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\cos\gamma}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{\cos\gamma}}$. **138.** а) $a(1+\cos\alpha)$; б) $2\sqrt{3}a\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **140.** $3S$. *Вказівка*. Розріжте піраміду по бічних ребрах і доведіть, що отримана розгортка — трикутник, а сторони основи піраміди — його середні лінії. **141.** $\frac{\sqrt{3}l^2}{3\cos^2\beta\sin\beta}$. **142.** $\frac{16m^2}{\sin^2\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **143.** $\frac{3\sqrt{3}l^2}{\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\beta}}$. **144.** $\frac{4H^2\sin\beta}{\cos^2\beta}(1+\sin\beta)$. **145.** $150°$. **146.** 5 см, 5 см і 8 см. **158.** б) 8 см; в) $24\sqrt{2}$ см$^2$. **159.** в) 48 см$^2$. **160.** в) $\frac{a^2}{\cos\beta}(1+\sin\beta)$. **162.** 24 см. **163.** $8\sqrt{3}$ см$^2$. **164.** $\frac{a\,\mathrm{ctg}\gamma}{2\sin\alpha}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$. **165.** $\frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin\alpha}$. **167.** 72 см$^2$. **168.** 36 см$^2$. **169.** а) 48 см$^2$; б) 36 см$^2$. **170.** $\frac{ab}{2\cos\alpha}$. **171.** 54 см$^2$. **172.** $\frac{4R^2\cos^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\beta\right)$. **173.** в) $a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$. **174.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\beta}(1+2\sin\beta)$. **175.** Середина більшої основи; 14 см. **176.** $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\gamma}$. **177.** $\frac{c^2\sin2\alpha}{4\cos\beta}$. **178.** $\frac{b^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$. **179.** $\frac{4H^2\,\mathrm{ctg}\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. **180.** $\frac{4l^2\sin\beta}{\sin\alpha}$. **181.** $\frac{a^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$. **182.** $(210\sqrt{3}+588)$ см$^2$. **183.** $\frac{r^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}(\sin\beta+2)$. **184.** $\frac{m^2(1+\cos\beta)^2\,\mathrm{ctg}\beta}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\beta}\right)$. **185.** $\frac{\sqrt{2}d\,\mathrm{tg}\beta}{2}$. **186.** $\frac{r\,\mathrm{tg}\beta\left(1+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **187.** $\frac{4d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha\cos\beta}$. **188.** $\frac{4a^2\,\mathrm{tg}^2 2\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. **201.** 50 см$^2$.

**202**. $64\sqrt{2}$ см$^2$. **203**. 225 см$^2$. **204**. 18 см$^2$. **205**. $48\sqrt{2}$ см$^2$. **206**. 400 см$^2$. **207**. 760 см$^2$. **208**. а) Рівнобічна трапеція; б) 30 см$^2$. **209**. $9\sqrt{2}$ см$^2$. **210**. $\frac{3}{8}b^2\sin 2\alpha$. **212**. $\sqrt{34}$ см; 5 см. **213**. 4 см. **214**. 256 см$^2$. **215**. 125 дм$^2$. **216**. 324 см$^2$. **217**. $\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}\alpha$. **218**. 128 см$^2$. **220**. 560 см$^2$. **221**. 672 см$^2$. **222**. $18\sqrt{2}$ см$^2$. *Вказівка*. Доведіть, що висота перерізу, проведена до діагоналі основи, паралельна бічному ребру й дорівнює його половині. **223**. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\beta}$. **224**. 8 м. **225**. $\frac{72}{49}m^2\cos^2\alpha$. **226**. 100 см$^2$. **227**. $\frac{\sqrt{3}\left(b^2-a^2\right)}{4\cos\alpha}$. **228**. Правильний шестикутник; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **229**. 140 см$^2$. **230**. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. *Вказівка*. Доведіть, що всі діагональні перерізи даної піраміди рівновеликі. **231**. 45°. **232**. 30,9375 см$^2$. **233**. $16\sqrt{2}\left(3+\sqrt{41}\right)$ см$^2$. **234**. 4 см$^2$ і 16 см$^2$. **235**. 48 см. **236**. 54 см$^2$. **237**. 396 см$^2$. **238**. Ні. **239**. $9\sqrt{3}$ см$^2$. **250**. а) $a^2\sqrt{3}$; б) $6a^2$; в) $2a^2\sqrt{3}$; г) $5a^2\sqrt{3}$. **251**. а) $45\sqrt{3}$ см$^2$; б) $30\sqrt{3}$ см$^2$; в) $15\sqrt{3}$ см$^2$; г) $9\sqrt{3}$ см$^2$. **253**. а) $2\sqrt{3}$ см$^2$; б) $\frac{8m^2\sqrt{3}}{3}$. **254**. а) $54\sqrt{3}$ см$^2$; б) $2d^2$. **257**. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. **259**. 16 см$^2$ або $8\sqrt{2}$ см$^2$. **260**. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **265**. 9:1. **266**. Квадрат. *Вказівка*. Скористайтеся перпендикулярністю мимобіжних ребер правильного тетраедра. **267**. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **268**. $144\pi$ см$^2$. **269**. $\sqrt{3}:2$.

**Тестове завдання для самоперевірки № 1.** **1**. Б. **2**. В. **3**. Г. **4**. А. **5**. В. **6**. Г. **7**. Б. **8**. В. **9**. Б. **10**. Г. **11**. Г. **12**. А.

**271**. 60°. **272**. $96\sqrt{2}$ см$^2$. **273**. 330 см$^2$. **274**. $25\sqrt{3}$ см. **275**. $6\sqrt{Q^2-S^2}$. **277**. $\frac{a^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$. **278**. $\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. **279**. $\frac{3a}{2}$. **280**. $\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **281**. $2l^2\cos^2\alpha\sin\gamma$. **282**. 512 см$^2$, 800 см$^2$. **283**. $\frac{4a^2}{3}$. **289**. *Вказівка*.

Розгляньте тригранний кут, вершина якого лежить всередині даного тригранного кута, а ребра перпендикулярні до граней даного тригранного кута. **291**. $\frac{3\sqrt{6}a^2}{4}$, ні. **292**. $8\sqrt{10}$ см$^2$. **293**. $\frac{15S}{16}$. **295.** в, г. *Вказівка*. Застосуйте результати задач 199, 200. **296.** *Вказівка*. Розгляньте розгортку даного тетраедра. **297.** б. *Вказівка*. Добудуйте тетраедр до прямокутного паралелепіпеда. **298.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$. *Вказівка*. Застосуйте векторний метод. **299.** $\frac{\sqrt{105}}{6}$. *Вказівка*. Застосуйте векторний метод.

## Розділ II

**308**. 10 см або $\sqrt{265}$ см. **309**. 3 см; $6\sqrt{3}$ см. **310**. 48 см$^2$. **311**. $16\pi$ см$^2$. **312**. $12\sqrt{3}$ см$^2$. **313**. $169\pi$ см$^2$. **314**. а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$; б) $48\sqrt{3}$ см$^2$. **315**. а) 168 см$^2$; б) $a^2\sqrt{2}$. **316**. а) $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{1}{2}\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}$; б) $4m^2\operatorname{tg}\alpha$. **317**. $\frac{2\sqrt{3}S}{3}$. **318**. $d\sin\beta$, $\frac{d\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **320**. $\frac{4m^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **321**. $l^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\beta$. **322**. 61 см$^2$. **323**. $Q\sin\varphi$. **324**. $\frac{S}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **325**. $7\sqrt{3}$ см або $\sqrt{3}$ см. **326**. $\frac{2R}{\cos\varphi}$. **327**. а) 24 см; б) 280 см$^2$. **328**. 15 см або 3 см. *Вказівка*. Ортогональною проекцією даного квадрата на площину основи циліндра є прямокутник або відрізок. **329**. 24 см$^2$. **330**. 30°. **331**. 15 см. **341**. $9\sqrt{3}$ см, 9 см; рівносторонній трикутник. **342**. $\frac{H}{\sin\alpha}$, $H\operatorname{ctg}\alpha$. **343**. $\approx 32,5$ м$^2$. **344**. 8 см$^2$. **345**. $\frac{2R^2}{3}$. **346**. 120 м$^2$. **347**. 3 см. **348**. а) 10 см і 20 см; б) $81\pi$ см$^2$. **349**. 20 см. **351**. а) 5 м; б) 2 м. **352**. 132 см$^2$. **353**. $25\pi$ см$^2$. **354**. $3\sqrt{3}$ см, 3 см. **355**. 300 см$^2$. **356**. 30°. **357**. $\frac{S\sin 2\alpha}{\sin\beta}$. **358**. $\frac{H^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **359**. Три відрізки по 6 см.

**360**. $16\pi$ см$^2$, $64\pi$ см$^2$. **361**. 84 см$^2$. **362**. 768 см$^2$. *Вказівка*. Доведіть, що діагональ осьового перерізу перпендикулярна до твірної, з якою вона має спільний кінець. **363**. 8 см. **364**. 84,5 см$^2$. *Вказівка*. Шуканий переріз проходить через дві взаємно перпендикулярні твірні. **365**. $0{,}75l$. **366**. $\dfrac{d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha}$. **367**. 500 см$^2$. **368**. 8 см. **369**. $\left(3+2\sqrt{2}\right):1$. **370**. 25 см або 7 см. **371**. а) 10 см; б) $2\sqrt{13}$ см. **380**. а) 15 см; б) 10 см; в) 18 см. **381**. 8 см. **382**. а) $25\pi$ см$^2$; б) 41 см; в) 3 см. **383**. $\approx 110$ м. **384**. $3\sqrt{3}$ см. **387**. 12 см. **388**. $36\sqrt{3}$ см$^2$. **389**. 24 см. **390**. 17 см. **391**. 6 см. **392**. 8 см, 2 см. **393**. 24 см, 32 см. **395**. $\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$. **396**. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. **397**. ≈ 24 233 км. **399**. 7 см. **400**. 15 см. **401**. $0{,}5a$. **402**. 90°. **403**. а) 7 см; б) 20 см. **404**. а) 5 см; б) 5 см. **405**. 10 см і 15 см. **406**. 30 см. **408**. $16\pi$ см. **409**. а) Площина, яка перпендикулярна до відрізка з кінцями в даних точках і проходить через його середину; б) дві площини, паралельні даній і віддалені від неї на $R$; в) сфера з центром у центрі даної кулі і радіусом $\sqrt{R^2-\dfrac{S}{\pi}}$. **410**. а) Сфера з центром $A$ і радіусом $R$; б) пряма, яка перпендикулярна до площини $\alpha$ і проходить через точку $A$ (окрім точки $A$); в) великий круг, площина якого перпендикулярна до даної прямої. **411**. $h\sqrt{2S}$. **412**. $\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$.

**Тестове завдання для самоперевірки № 2.** **1**. В. **2**. А. **3**. Б. **4**. В. **5**. А. **6**. Б. **7**. Б. **8**. Г. **9**. А. **10**. В. **11**. Б. **12**. Г.

**413.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **414.** $R-\dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2-d^2}$. **415.** а) $\dfrac{l\sqrt{6}}{3}$; б) $\dfrac{l\sqrt{3}}{3}$. **416.** 45°. **417.** $9\pi$ см$^2$. **418.** $2Q$. **420.** 5 : 8. **425.** $\left(2\sqrt{3}+1\right):11$. **426.** 5. **428.** $\dfrac{4}{3}R$.

## Розділ III

**430**. 10 000 м. **431.** Ні. **432.** Так, збільшиться у 2 рази. **433.** 4 дм. **437**. а) 216 см$^3$; б) 125 дм$^3$; в) 343 см$^3$. **438**. 2 см$^3$. **439**. а) 0,008 м$^3$; б) 27 дм$^3$. **440**. а) 160 см$^3$; б) 6912 см$^3$; в) $ab\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\alpha$. **443**. 30 дм. **444**. а) 6,4 см$^3$; б) 960 м$^3$; в) $1280\sqrt{3}$ см$^3$. **445**. а) 84 см$^3$; б) $aS\sin\alpha$. **446**. 54 см$^3$. **447**. $\dfrac{\sqrt{3}a^2H}{4}$; $a^2H$; $\dfrac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$. **448**. $20\sqrt{3}$ см$^3$. **449**. 324 см$^3$.

**450**. а) 360 см$^3$; б) 72 см$^3$; в) 9 см$^3$. **451**. 5 см. **452**. 70 см$^3$. **453**. 96 см$^3$. **454**. а) $75\pi$ см$^3$; б) $16\pi$ см$^3$; в) $54\pi$ см$^3$. **455**. а) $80\pi$ см$^3$; б) $150\pi$ дм$^3$. **456**. $\frac{4V}{\pi d}$. **460**. Так. **461**. $\frac{\pi d^3}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ або $\frac{\pi d^3}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$. **464**. $\frac{\sqrt{3}d^3}{9}$. **465**. $Q\sqrt{Q}$. **466**. 2 см. **467**. 5 см. **468**. $6\sqrt{95}$ см$^3$. **469**. 36 000 см$^3$. **470**. $480\sqrt{3}$ см$^3$. **471**. $\frac{\sqrt{2SS_1S_2}}{2}$. **472**. 12 см$^3$. **474**. $80\sqrt{2}$ см$^3$. **476**. 252 см$^3$. **477**. 216 см$^3$ або 108 см$^3$. **478**. 81 см$^3$. **479**. $a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **480**. $\frac{aS}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **481**. $\frac{d^3\left(\sin\alpha+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{4\,\mathrm{tg}\,\beta}$. **482**. $\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$. **483**. $\frac{Q\sqrt{\pi S}}{2}$. **484**. $\frac{\pi d^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ або $\frac{\pi d^3\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **485**. $\frac{\pi m^3\sin\beta\cos^2\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **486**. 1875 см$^3$. **489**. 30 см$^3$. **490**. $\frac{l^3}{24}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$. **491**. $\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{tg}\,\gamma}{4}$. **492**. $\frac{\pi a^2H}{4\sin^2\alpha}$. **493**. $\frac{dl(d+b)}{2}$. **494**. $3\sqrt{3}r^2l$. **495**. 4:1. **496**. $16:3\sqrt{3}$. **497**. $\frac{1}{2}\pi Q\sin\alpha\sin\beta\sqrt{Q\cos\beta c\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **498**. $\frac{\pi d^3}{4\sin^2\beta\cos^2\alpha\cos\beta}$. *Вказівка*. Доведіть, що даний перпендикуляр належить бічній грані призми. **500**. $\mathrm{arctg}\sqrt{6}$. **501**. $\frac{\sqrt{\pi S}}{\pi\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **502**. а) Зменшиться в 3 рази; б) збільшиться у 2 рази. **503**. а) 1:3; б) 1:9. **504**. 2:1. **505**. 27. **510**. а) 20см$^3$; б) 80 дм$^3$; в) 300 см$^3$. **511**. а) 80 см$^3$; б) 240 см$^3$; в) 288 дм$^3$. **512**. а) $\sqrt{3}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}R^3\,\mathrm{tg}\,\beta}{4}$. **513**. а) $\frac{4}{3}h\left(a^2-h^2\right)$; б) $\frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}$. **514**. а) $\frac{2}{3}h^3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$. **515**. 1125 см$^3$. **516**. 5 см$^3$. **517**. $66\frac{2}{3}$ см$^3$. **518**. $8\sqrt{3}$ см$^3$. **519**. 2 см$^2$. **520**. 28 см$^3$. **521**. а) $8\pi$ см$^3$; б) $100\pi$ см$^3$; в) $9\pi$ см$^3$. **522**. $52\pi$ см$^3$. **523**. 7 см. **524**. $\frac{3V}{\pi Q}$. **525**. $\frac{3V}{S}$. **526**. а) $36\pi$ см$^3$; б) $288\pi$ см$^3$; в) $\frac{32\pi}{3}$ см$^3$.

**527.** $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$. **528.** $\frac{16d^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$. **529.** $\frac{16}{3}m^3\operatorname{tg}\beta$. **530.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

**531.** $2\sqrt{3}d^3\sin\beta\cos^2\beta$. **532.** $\frac{1}{24}c^3\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma$. **533.** $\frac{b^3\operatorname{ctg}\gamma}{48\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

**534.** $\frac{2}{3}c^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\gamma$. **535.** $\frac{1}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **536.** $\frac{4h^3\sin\gamma\cos^2\gamma}{3\sin\beta}$.

**537.** $\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **543.** $\frac{1}{3}a^3\operatorname{ctg}^2\gamma$. **544.** $\frac{1}{6}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$.

**545.** $\frac{1}{12}b^3\sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$. **546.** $\frac{1}{12}\operatorname{tg}\varphi\cdot\left(a^3-b^3\right)$. **547.** 4 см. **548.** $8\pi$ см$^3$. **549.** $12\pi$ см$^3$.

**550.** $\frac{\pi}{3}ah^2$. **551.** $\frac{1}{4}\pi a^3$. **552.** см і 5 см. **553.** 2 см і 5 см. **554.** $\frac{4}{3}\pi\left(d^2+\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$.

**555.** 9 см. **556.** $252\pi$ см$^3$, $468\pi$ см$^3$, $252\pi$ см$^3$. **557.** $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

**558.** $126\pi$ см$^3$, $4374\pi$ см$^3$. **559.** $\frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\beta-1}$.

**560.** $\frac{l^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$. **561.** $\frac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}$. **562.** $\frac{1}{12}b^3\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)$.

**563.** $\frac{8\sqrt{2}b^3\operatorname{tg}\alpha}{3\left(1+2\operatorname{tg}^2\alpha\right)^{1,5}}$. **564.** $-\frac{\pi l^3\operatorname{tg}\gamma}{3\cos^3(\alpha+\beta)}$. **565.** $\frac{1}{24}\pi a^3\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$.

**570.** $\frac{\sqrt{3}c^3\left(1+4\operatorname{tg}^2\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}{4\operatorname{tg}^2\gamma}$. **571.** $\frac{1}{24}$. **572.** 15 см. **573.** 30°. **574.** Так. **575.** Ні.

**577.** Так. **578.** 9:2. **579.** $\frac{4+4\pi}{1+4\pi}$. **581.** а) $30\pi$ см$^2$; б) $24\pi$ см$^2$; в) $\frac{3}{2}\pi a^2$; г) $\frac{\sqrt{2}\pi c^2}{4}$. **582.** $6\pi$ см$^2$. **583.** $147\pi$ см$^2$. **584.** $2\pi\left(3\sqrt{2}+5\right)$ см.

**585.** $80\pi$ см. **586.** а) $16\pi$ см$^2$; б) $36\pi$ см$^2$. **587.** У 4 рази.

**588.** $144\pi$ см$^2$. **589.** 90°. **590.** $\frac{\pi d^2\cos\gamma(\cos\gamma+2\sin\gamma)}{2}$. **596.** $\frac{\pi d^2\sin 2\beta}{2\sin\alpha}$.

**598.** $\frac{\pi a^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin^2\alpha}$. **599.** $\frac{4\pi m^2\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **600.** $16\pi$ см$^2$. **601.** $8\pi d^2\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

**602**. $400\pi$ см$^2$. **603**. $\pi r^2+2\pi R\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)$. **604**. 18 см. **605**. $275\pi$ см$^2$. **606**. $2\pi R\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)$. **607**. $\dfrac{4\pi h^2}{\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$. **608**. $\dfrac{\pi H^2}{\cos^2\beta}$.

**610**. $\pi a^2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}$. **611**. $\dfrac{2\pi d^2}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi}$. **612**. $\dfrac{2\pi m^2}{\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$.

**613**. $\dfrac{\pi d^2\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi\right)}$. **614**. $\dfrac{\pi a^2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\phi\right)}$. **617**. 826 цеглин.

**Тестове завдання для самоперевірки № 3.** **1**. Г. **2**. Б. **3**. А. **4**. Г. **5**. Б. **6**. Б. **7**. Г. **8**. Б. **9**. А. **10**. Б. **11**. Г. **12**. В.

**618**. 1 см$^3$. *Вказівка*. Виберіть за основу піраміди одну з бічних граней. **619**. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$. **620**. $2\pi R^3$, $6\pi R^2$. **621**. $\dfrac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$, $3\pi R^2$. **622**. 1:7:19:37. **623**. $\dfrac{b}{a}$. **624**. $\dfrac{\pi R^2\left(4-\sqrt{2}\right)}{2}$. **644**. Дві площини, паралельні площині даного многокутника і віддалені від неї на $\dfrac{3V}{S}$. **646**. $\dfrac{1}{16}a^3\sin 2\alpha$; $\dfrac{1}{24}a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(2-3\cos^2\alpha\right)$. **647**. $\dfrac{a^3\cos\dfrac{\varphi}{2}}{3\sqrt{-2\cos\varphi}}$. **648**. $\dfrac{S\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2\pi S\cos\alpha}}{6\pi\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **651**. *Вказівка*. Розгляньте паралелепіпед, який утворюється при проведенні через кожне ребро тетраедра площини, паралельної протилежному ребру. **652**. $\dfrac{1}{24}(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

## Готуємось до ЗНО

**662.** В. **663.** Б. **664.** Г. **665.** Б. **666.** Б. **667.** Б. **668.** Г. **669.** А. **670.** А. **671.** Г. **672.** Б. **673.** 1–Д, 2–А, 3–Б, 4–В. **674.** б) 8 см. **675.** б) $75^\circ$ і $105^\circ$. **676.** 16 см; так, так. **677.** а) 24 см; б) так; так. **678.** а) 50 см; б) так, ні. **679.** б) 18 см. **680.** б) 60 см. **681.** 120 см$^2$. **682.** 26 см. **683.** 90 см$^2$. **684.** 20 см. **685.** $135^\circ$, 6 см$^2$. **686.** $9\sqrt{3}$ см$^2$. **687.** $6\sqrt{3}$ см$^2$. **688.** 9 см. **689.** 24 см. **690.** $120^\circ$. **691.** 2 см. **692.** г) $25\sqrt{3}$ см$^2$. **693.** в) $2\sqrt{3}$ см$^2$.

**694.** б) $8\sqrt{3}$ см$^2$. **695.** б) 1200 см$^2$. **696.** а) 294 см$^2$; б) $3:4$. **697.** 2352 см$^2$. *Вказівка*. Центр вписаного кола є точкою перетину бісектрис трикутника. **698.** 7 см і $\sqrt{129}$ см; $40\sqrt{3}$ см$^2$. **699.** 34 см. **700.** 12 см. **701.** а) 30°, 30°, 120°; б) 60°. **702.** $30\sqrt{3}$ см$^2$, $\frac{169}{3}\pi$ см$^2$. **703.** $\frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.
**704.** $\frac{l \sin\frac{3\alpha}{2}(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **705.** 156 см$^2$. **707.** 204 см$^2$. **708.** 45°. **711.** 10.
**712.** 98 см і 588 см$^2$. **713.** *Вказівка*. Якщо $a$ і $b$ — катети, $r$ — радіус вписаного кола, $m$ і $n$ — дані відрізки, то $a=m+r$, $b=n+r$, $p=m+n+r$ — півпериметр. Оскільки $S=0{,}5ab$, $S=pr$, то $2S=(m+r)(n+r)$, $S=(m+n+r)r$. Віднімаючи від першої рівності другу, отримуємо $S=mn$.
**714.** 30°, 60°, 90°. *Вказівка*. Нехай $\angle A<\angle B$. *1-й спосіб*. Доведіть, що $AH=HM=0{,}5MB$, тоді $CB=2CH$ за властивістю бісектриси. *2-й спосіб*. Побудуйте трикутник $ABD$, симетричний даному відносно прямої $AB$, і доведіть, що трикутник $BCD$ рівносторонній. **715.** *Вказівка*. Нехай точки $E$ і $F$ — проекції точок $A$ і $C$ на діагональ $BD$ відповідно. *1-й спосіб*. Позначивши $\angle BAC=\angle BDC=\alpha$, $\angle ABD=\angle ACD=\beta$, доведіть, що $BE=DF=AC\cos\alpha\cos\beta$. *2-й спосіб*. Скористайтеся тим, що $\triangle ABE \sim \triangle BCF$, $\triangle CFD \sim \triangle DAE$. **716.** На 1 см. **717.** 6 см. **718.** 144 см$^2$.
**719.** $10\sqrt{10}$. **720.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=25$. **721.** 10 см. **722.** 96 см$^3$.
**723.** 60°. **724.** 40 хв. **725.** $\frac{V}{4}$ м$^3$. **726.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **727.** $8\sqrt{3}$ см$^2$.
**728.** На 8 склянок. **729.** $33\frac{1}{3}\,\%$. **730.** 72 см$^2$. **731.** 54 см. **732.** 972 см$^3$.
**733.** $\sqrt{5}$. **734.** 17 см. **735.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **736.** $\frac{R^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$. **737.** 8 см$^3$.
**738.** $\frac{d^3 \operatorname{tg}\alpha}{3}$. **739.** $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ см. **740.** 1,75 см$^3$. **741.** 9 см$^2$. **742.** 6 см$^2$.
**743.** 7 см$^3$. **744.** $\frac{6m-3n}{4n}$. **745.** 12,5.

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

## ЗМІСТ

**Розділ III. Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл**

Навчальне видання

*ЄРШОВА Алла Петрівна*
*ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович*
*КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Феліксович*
*ЄРШОВ Сергій Володимирович*

**«ГЕОМЕТРІЯ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)»**
**підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско*.
Художнє оформлення *В. І. Труфен*. Комп'ютерна верстка *О. М. Правдюк*.
Коректор *Н. В. Красна*.

Т470283У. Формат 70×90/16.
Гарнітура Шкільна. Ум. друк. арк. 17,5.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, факс (057) 719-58-67.
www.ranok.com.ua

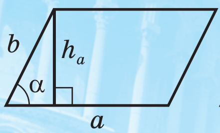
Регіональні представництва видавництва «Ранок»:
Київ – тел. (044) 229-84-01,
e-mail: office.kyiv@ranok.com.ua,
Львів – тел. (067) 269-00-61,
e-mail: office.lviv@ranok.com.ua

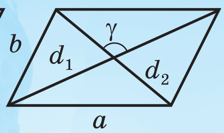
З питань придбання продукції видавництва «Ранок» звертатися за тел.:
у Харкові – (057) 727-70-80;
Києві – (067) 449-39-65, (093) 177-05-04;
Вінниці – (067) 534-51-62;
Дніпрі – (056) 785-01-74, (067) 635-19-85;
Житомирі – (067) 122-63-60;
Львові – (032) 244-14-36, (067) 340-36-60;
Миколаєві та Одесі – (067) 551-10-79;
Черкасах – (0472) 51-22-51;
Чернігові – (067) 440-88-93.
E-mail: commerce@ranok.com.ua

# ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ПЛАНІМЕТРІЇ

## ЧОТИРИКУТНИКИ

### Довільний паралелограм



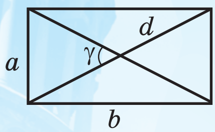

**Зв'язок між діагоналями і сторонами**

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

**Площа**

$$S = ah_a \qquad S = ab\sin\alpha \qquad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$$

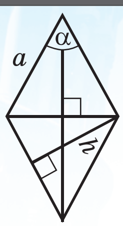
### Прямокутник

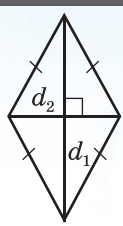



**Площа** $S = ab$, $S = \frac{1}{2}d^2\sin\gamma$

**Радіус описаного кола** $R = \frac{d}{2}$

### Ромб



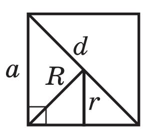




**Площа**

$$S = ah \qquad S = a^2\sin\alpha \qquad S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

**Радіус вписаного кола** $r = \frac{h}{2}$

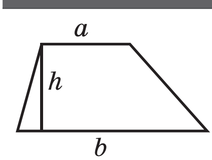
### Квадрат

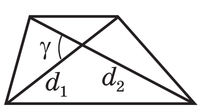



**Площа** $S = a^2$, $S = \frac{1}{2}d^2$

**Формули радіусів** $R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{a}{2}$

### Трапеція



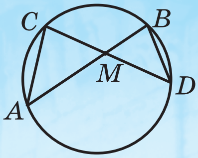




**Площа**

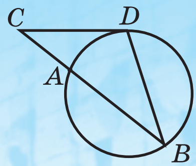
$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h \qquad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$$

# КОЛО

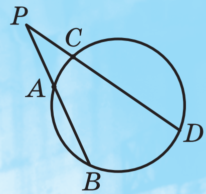
## Метричні співвідношення у колі




$AM \cdot BM = CM \cdot DM$

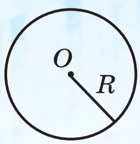



$CD$ — дотична,
$CD^2 = CB \cdot CA$



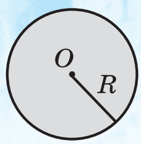

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

## Коло, круг і їхні елементи



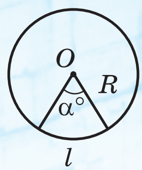

**Довжина кола**

$C = 2\pi R$



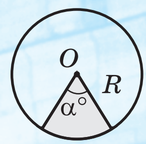

**Площа круга**

$S = \pi R^2$




**Довжина дуги**

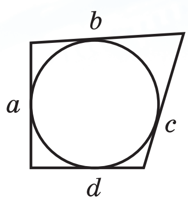
$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$




**Площа кругового сектора**

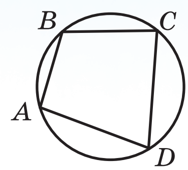
$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

## Описаний чотирикутник




$a + c = b + d$

## Вписаний чотирикутник




$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

## Формули радіусів вписаного і описаного кіл для правильного $n$-кутника зі стороною $a_n$

$$r = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}$$

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$